Пенчо Александров Николов

Математични методи на физиката II част, (ММФ II).

(лекции четени във ФФ през 1994 г.)

Частни диференциални уравнения, (ЧДУ).

Обща информация: Хорариум: 3 ч. лекции + 2 ч. упр. Чете се паралелно с "Функции на комплексна променлива" (който е с хорариум 2 ч. лекции + 2 ч. упр). Курсът ММФ II завършва с общ изпит: писмен (4 задачи за 4 часа) и устен, и е с една обща оценка. До устен изпит се допускат само взелите успешно писмения изпит.

Литература:

1. Хр. Я. Христов, Математични методи на физиката, София, 1967 г.
2. Р. Курант, Уравнения с частными производными, Москва, 1964 г.
   Р. Курант, Д. Хилберт, Методы математической физики, том II, Москва 1951 г.
3. В. С. Владимиров, Уравнения математической физики, Москва, 1981 г.
4. Л. Хёрмандер, Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, том I, II, III, IV, Москва, 1986-88 г.

(Монографията на Л. Хёрмандер отразява съвременното състояние на теорията на линейните частни диференциални оператори. Тя е поставена в този списък за да могат специално интересуващите се студенти, поглеждайки в нея, да добият представа за съвременните резултати и езика на който те се излагат. Тя не е необходима за този курс по ЧДУ.)

Уводни бележки:

физическите характеристики на изучаваните обекти обикновено са функции на много променливи. Примери: температурата на неравномерно нагрято тяло $u(x_1, x_2, x_3, t)$ е функция от координатите на точката (x_1, x_2, x_3) и времето t, аналогично интензитетът на електричното поле $\vec{E}(x_1, x_2, x_3, t)$, магнитната индукция $\vec{B}(x_1, x_2, x_3, t)$, скоростта на точките от движещ се флуид и т.н.
В зависимост от физическите условия тези функции са различни и се променят с времето. Как можем да определим тези функции и по този начин да направим предсказание за природата? Като общо правило това става чрез решаване на частни диференциални уравнения които тези функции удовлетворяват. В това се реализира и смисълът на физическото (или "научното") познание съдържащ се в заглавието на първата (в съвремен смисъл) монография по физика "Математични принципи на [redacted]алната философия". Ние правим математично моделиране. На някои обекти от природата и на някои техни характеристики съпоставяме математични конструкции - техни математични идеализации. "Математичните образи" могат да се променят съгласно законите, "принципите" на математиката. Ако при тази промяна те, съгласно направеното съответствие, отговарят точно на характеристиките на реалните обекти, участвуващи в реални процеси в природата, казваме, че имаме добра физическа теория.

Обикновено това което се прави за да се определят физическите характеристики описвани с функции на няколко променливи е написването и решаването на Ч.Д.У. По този начин частните диференциални уравнения, през свойствата на решенията които те определят, моделират процесите в природата и са основната част от езика с който ние разбираме, описваме и правим предсказания за експеримента. Те също са и начин за еднозначно определяне на цели класове от нови функции не можещи да се изразят просто през "елементарните" функции както и основа за тяхното числено намиране. Поради това познание за Ч.Д.У. са необходими за основните физически курсове и не е възможно този курс да се прескочи и после студентът да е добър в останалите физически курсове.

Поучително е да се проследи ролята на ЧДУ в историческото развитие на електродинамиката. Първо имаме закон на Кулон, даващ директно силата на взаимодействие между два неподвижни точкови товара и неговото обобщение за непрекъснати товари. После идва идеята за електрично поле поле определено от система товари

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{k(\vec{x}\,').(\vec{x}-\vec{x}\,')}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|^3}\, dx_1' dx_2' dx_3' . \quad (1)$$

и сила действаща на точков товар е поставен в точка с координати $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$: $\vec{F} = e\vec{E}(\vec{x})$. По нататък са намерени Ч.Д.У (на електростатиката) които се удовлетворяват от $\vec{E}(\vec{x})$ и напълно го определят. (аналогично и за магнитната индукция $\vec{B}(\vec{x})$). При движещи се товари силата на взаимодействие е много сложна и обобщение на (1) не е могло да се направи, но лесно са се обобщили диференциалните уравнения определящи $\vec{E}$ и $\vec{B}$, → получават се Ч.Д.У. на Максуел. Те притежават нов тип неочаквани решения (примерно стоящи вълни) които се откриват експериментално и въвеждат нов тип характеристики на полето — енергия и импулс на електромагнитното поле които също се наблюдават.

От тук вяра в диференциалните оператори (уравненията на Максуел) и тяхното изучаване → откриване на нов вид геометрия и математични структури съдържащи се в тях.

индефинитна метрика и специална теория на относителността → неочаквани следствия и предсказания "относителност на времето", "скъсяване на разстоянията", "парадокс на близнаците" и т.н. които се потвърждават → по нататъшни обобщения водещи до неплоска псевдориманова геометрия и електромагнитно поле в присъствие на гравитация. (Тук вече се среща нещо по-сложно: писането на Ч.Д.У. чиито решения са самите обобщени уравнения на Максуел, които пък от своя страна определят електромагнитното поле) → това се обобщава за други видове "товари" описващи взаимодействието на елементарните частици → достигаме до съвременните успехи на теоретичната и математичната физика.

Необходимият материал по ЧДУ е голям. Няма общо правило за решаване на ЧДУ. Съществуват множество различни случаи с различна специфика, включващи в себе си почти всички аспекти на съвременната математика. За овладяване на необходимите факти по ЧДУ използвани в основните физични курсове само паметта не е достатъчна. Необходимо е разбиране, схващане на общите принципи и изработване на интуиция. Това може да се постигне само с постоянен интерес, системна работа и непрекъснати дискусии. В добрия университет студентите говорейки помежду си научават за науката повече отколкото в лекциите.

В настоящия курс от лекции ще разгледаме само някои случаи на ЧДУ даващи представа за общите закономерности и най-често срещани в "класическата теоретична физика".

<u>Означения</u>

$\mathbb{R}^n$ – аритметичното n-мерно векторно пространство, състоящо се от наредените n-тойки от реални числа

$\mathbb{R}^n \ni (x_1, \dots, x_n) \equiv (x_\mu) \equiv (x)$, $\mu = 1, 2, \dots, n$.

При $n = 3$ обикновено ще пишем $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$

$u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $u = u(x_1, \dots, x_n) \equiv u(x)$ – функция на n-променливи

$\mathbb{R}^n$ е снабдено със стандартната метрика и топология: $x.y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$;

$|x - y| = ((x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n))^{\frac{1}{2}}$, две точки x, y са "близки" ако $|x - y|$ е "малко"

За частните производни ще използваме следните по-кратки означения

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} u(x_1, \ldots, x_n) \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} u(x) = \partial_{x_\mu} u(x) \equiv \partial_\mu u(x)$$

Примерно $\frac{\partial^3}{\partial x_1^2 \partial x_2} u(x) = \partial_1 \partial_1 \partial_2 u(x) = \partial_1^2 \partial_2 u(x)$

$\partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \ldots \partial_{\mu_r} u(x)$ е общия вид на частна производна от ред r, $r = 0, 1, \ldots$. (Под частна производна от нулев ред се разбира самата функция $u(x)$). Тъй като частната производна не зависи от реда на диференциране, независимите частни производни се получават при всевъзможните избори на индексите, удовлетворяващи $1 \le \mu_1 \le \mu_2 \le \cdots \le \mu_r \le n$. Въпрос: Колко са всички независими частни производни от ред r?

отговор $\binom{n+r-1}{r} = \binom{-n}{r}(-1)^r$. Колко са всички независими частни производни от ред 0 до ред r включително за функция на n-променливи? отговор $\sum_{p=0}^{r} \binom{n+p-1}{p} = \binom{n+r}{r}$.

Ще предполагаме автоматично, че всички разглеждани функции притежават непрекъснати частни производни от произволен ред или накратко, че са 'гладки' функции.

$C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $(C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}))$ — множеството всички гладки реалнозначни (комплекснозначни) функции на n променливи. Ако е ясно от контекста какви са стойностите ще пишем накратко $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
$C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ — множеството гладки многокомпонентни функции: $(x_1, \ldots, x_n) \to (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_n))$

и всяко $f_i(x)$ е гладко.

<u>Частно диференциално уравнение</u> за функция на n променливи от ред r наричаме съотношението

$$F(x_\mu, u, \partial_{\mu_1} u, \dots, \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_r} u) = 0 \quad , \qquad (2)$$

$$\mu, \mu_i = 1, 2, \dots, n, \quad 1 \le \mu_1 \le \mu_2 \le \dots \le \mu_k \le n, \quad k = 1, 2, \dots, r.$$

Тук

$$F = F(x_\mu, u, p_{\mu_1}, \dots, p_{\mu_1 \dots \mu_r}) \qquad (3)$$

е гладка функция на $n + \binom{n+r}{r}$ променливи.

<u>Частно решение</u> наричаме функция $u(x_1, \dots, x_n)$ такава, че като заместим в (3) $u = u(x)$, $p_{\mu_1} = \partial_{\mu_1} u(x), \dots, p_{\mu_1 \dots \mu_r} = \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_r} u(x)$ получаваме че (2), което вече е функция на $(x_1, \dots, x_n)$ е тъждествено изпълнено спрямо променливите $(x_1, \dots, x_n)$

<u>Пример</u>.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} u + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} u = 0 \ , \ u = u(x_1, x_2) \quad \text{е ч.д.у}$$

е $F(x_1, x_2, u, p_1, p_2) = p_1 + x_2 p_2$.

$u(x_1, x_2) = x_2 e^{-x_1}$ е частно решение
действително $-x_2 e^{-x_1} + x_2 e^{-x_1} = 0$

$f(x_2 e^{-x_1})$ също реш.

<u>Общо решение</u> наричаме съвкупността на всички частни решения.

<u>Област на решимост</u>. Често пъти $u(x)$ е дефинирана не в цялото пространство $\mathbb{R}^n$ а в

област $D \subset \mathbb{R}^n$. Примерно температурата $u(x_1, x_2, x_3, t)$ се разглежда не в цялата вселена, а във вътрешността на изучаваното тяло и в определен интервал от времето:
$(\vec{x}, t) \in V \times [t_0, t_1] = D \iff \vec{x} \in V \ \& \ t \in [t_0, t_1]$
където $V \subset \mathbb{R}^3$ е вътрешността на тялото. Тогава казваме, че D е област на решимост.
Забележка. Ако $x \in D$ - област на решимост за $u, p_{\mu_1}, \dots, p_{\mu_1 \dots \mu_r}$ в (3) няма никакви ограничения (защо?).
Диференциален оператор. Трябва да се прави разлика между диференциално уравнение и диференциален оператор. Диференциалният оператор се определя от функцията F в (3), но е изображението
$u(x) \to F(x, u(x), \partial_{\mu_1} u(x), \dots, \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_r} u(x)) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$,
т.е. имаме изображение $C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$
$u(x) \to F(x, u, \partial_{\mu_1} u, \dots, \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_r} u) \equiv F[u](x)$.
Диференциалното уравнение е условието $F[u] = 0$.
Диференциалните оператори са локални. Т.е. ако в някоя околност $V \ni x_0$ на $x_0 \in \mathbb{R}^n$ функциите $u_1(x)$ и $u_2(x)$ съвпадат то $F[u_1](x_0) = F[u_2](x_0)$ (Защо?)
За многокомпонентни функции обобщенията са естествени. Диференциален оператор от ред r действащ върху k-компонентни функции и приемащ стойности l-компонентни функции е изображение
$C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \to C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^l)$ от вида
$(u_1(x), \dots, u_k(x)) \to (F_1(x_\mu, u_a, \partial_{\mu_1} u_a, \dots, \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_r} u_a), \dots$
$, F_l(x_\mu, u_a, \partial_{\mu_1} u_a, \dots, \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_r} u_a)] \equiv \vec{F}[\vec{u}]$
Система частни диференциални уравнения се получава като се наложи условието $\vec{F}[\vec{u}] = \vec{0}$

По компоненти имаме

Доп. уточни

$$\begin{cases} F_1(x_\mu, u_a, \partial_{\mu_1} u_{a_1}, \dots, \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_r} u_{a_r}) = 0 \\ \vdots \\ F_l(x_\mu, u_a, \partial_{\mu_1} u_{a_1}, \dots, \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_r} u_{a_r}) = 0 \end{cases}$$

$F_1(x_\mu, u_a, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(r)})$

$a_i = 1, 2, \dots, k \; ; \; \mu, \mu_i = 1, 2, \dots, n$

Това е система от l ч.д. уравнения (предполага се независими) за k-на брой функции на n-променливи

Терминология

$l > k$ преопределена система ч.д.у.

$l = k$ определена — " —

$l < k$ неопределена — " —

(Типът на системата не зависи от броя на променливите n)

Примери: Нека $\vec{A}(\vec{x})$ е векторно поле в $\mathbb{R}^3$ (3 компонентна функция)

$\vec{A} \to \operatorname{rot} \vec{A}$ е диференциален оператор

$\operatorname{rot} \vec{A} = 0$ – определена

$\operatorname{div} \vec{A} = 0$ – неопределена

$\operatorname{grad} u = \vec{0}$ – преопределена

Започваме изучаването на ч.д.у. в най-простия (по параметри случай) ч.д. уравнение от първи ред за функция на две променливи:
Т.е. уравнение от вида

$$F(x_1, x_2, u, \partial_1 u, \partial_2 u) = 0 \qquad (4)$$

което се определя от функция на 5 промен-ливи $F(x_1, x_2, u, p_1, p_2)$

Въпроси: – Съществува ли решение?

– Колко са всички решения?

– Каква допълнителна информация трябва да знаем за да определим еднозначно решението?

Ще дадем отговори на тези въпроси започвайки от най-простите случаи

Линейно уравнение се нарича частния случай, когато (4) има вида

$$a_1(x_1, x_2)\, \partial_1 u + a_2(x_1, x_2)\, \partial_2 u = 0 , \qquad (5)$$

$u = u(x_1, x_2)$, $F(x_1, x_2, u, p_1, p_2) = a_1(x_1, x_2)\, p_1 + a_2(x_1, x_2)\, p_2$,
$a_1(x_1, x_2)$, $a_2(x_1, x_1)$ са гладки функции

Очевидно в този случай диференциалният оператор $F[u]$ е линеен, в смисъл че
$F[\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2] = \alpha_1 F[u_1] + \alpha_2 F[u_2]$, $\forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$,
$\forall\, u_1, u_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ и сумата на решения е решение.

Частните решения на (5) са свързани със следната система обикновени диференциални уравнения

$$\left| \begin{aligned} \frac{d}{ds} x_1(s) &= a_1(x_1(s), x_2(s)) \\ \frac{d}{ds} x_2(s) &= a_2(x_1(s), x_2(s)) \end{aligned} \right. \equiv \left| \begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= a_2(x_1, x_2) \end{aligned} \right. \qquad (6)$$

Решенията на (6) се наричат "интегрални криви" или "характеристични криви" или просто "характеристики" за (5). Очевидно системата О.Д.У. (6) се определя от (5) и обратно.
Общото решение на (6) $\overset{\text{по принцип}}{\text{има}}$ вида

$$\left| \begin{aligned} x_1 &= x_1(s, \alpha_1, \alpha_2) \\ x_2 &= x_2(s, \alpha_1, \alpha_2) \end{aligned} \right. \qquad (7)$$

където α_1, α_2 са два параметъра и "изобщо" през всяка точка (x_1, x_2) минава само една характеристика.

Лема 1. Нека $u(x_1, x_2)$ е решение на (5). Тогава $u(x_1, x_2)$ е константа върху всяка характеристична крива

Доказателство. Нека $u(x_1, x_2)$ е решение на (5). Трябва да покажем, че за вс. решение $x_1(s)$, $x_2(s)$ на (6) $u(x_1(s), x_2(s)) = const$.

Пресмятаме

$$\frac{d}{ds} u(x_1(s), x_2(s)) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1(s), x_2(s)) \frac{dx_1}{ds}(s) + \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1(s), x_2(s)) \frac{dx_2}{ds}(s) =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1(s), x_2(s)) . a_1(x_1(s), x_2(s)) + \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) . a_2(x_1, x_2) = 0$$

защото $u(x_1, x_2)$ е решение на (5)

$\Rightarrow u(x_1(s), x_2(s)) = const.$

Т.е. решенията на (5) са първи интеграли на системата ОДУ (6).

Лема 2. Нека $u = u(x_1, x_2)$ е функция (гладка) която е константа върху всяка характеристична крива. Тогава $u(x_1, x_2)$ е решение на (5)

Доказателство.

Нека $u(x_1, x_2)$ е константа върху всяка характеристична крива. Нека (ξ_1, ξ_2) е произволна точка. През нея минава характеристична крива $(x_1(s), x_2(s))$ такава, че за някоя стойност $s = s_0$ на параметъра имаме $(x_1(s_0), x_2(s_0)) = (\xi_1, \xi_2)$. По условие $u(x_1(s), x_2(s)) = const$. Диференцираме по s

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{ds} u(x_1(s), x_2(s)) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1(s), x_2(s)) \frac{dx_1}{ds}(s) +$$

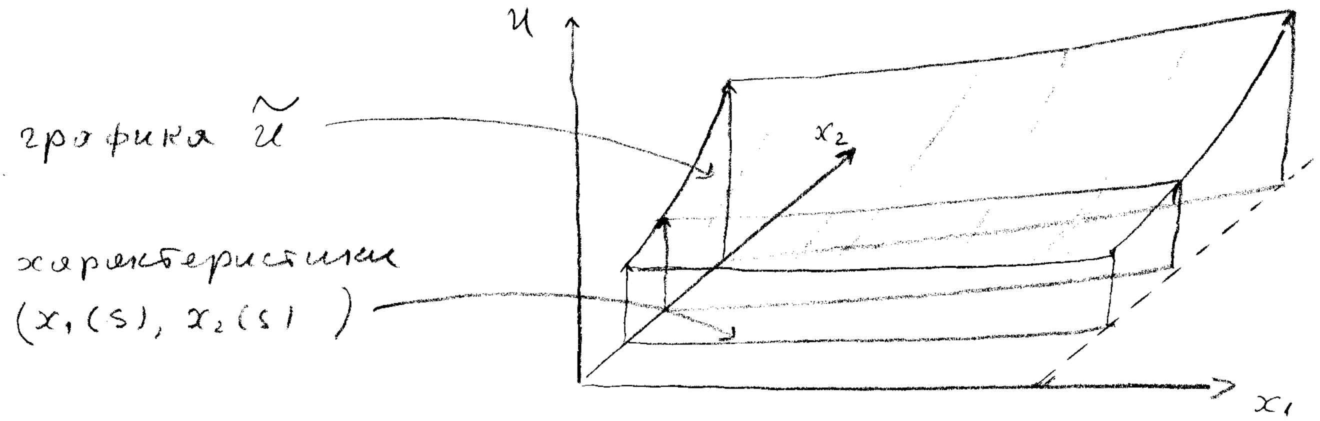
$$+ \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1(s), x_2(s)) \frac{dx_2}{ds}(s) =$$

$$= a_1(x_1(s), x_2(s)) \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1(s), x_2(s)) + a_2(x_1(s), x_2(s)) \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1(s), x_2(s))$$

при $s = s_0 \Rightarrow a_1(\xi_1, \xi_2) \frac{\partial u}{\partial x_1}(\xi_1, \xi_2) + a_2(\xi_1, \xi_2) \frac{\partial u}{\partial x_2}(\xi_1, \xi_2) = 0$

т.е. (5) е изпълнено в точката (ξ_1, ξ_2) а тя бе произволна $\Rightarrow$ $u(x_1, x_2)$ е частно решение на (5). Всеки първи интеграл на системата ОДУ (6) е решение на (5).

Геометрично представяне

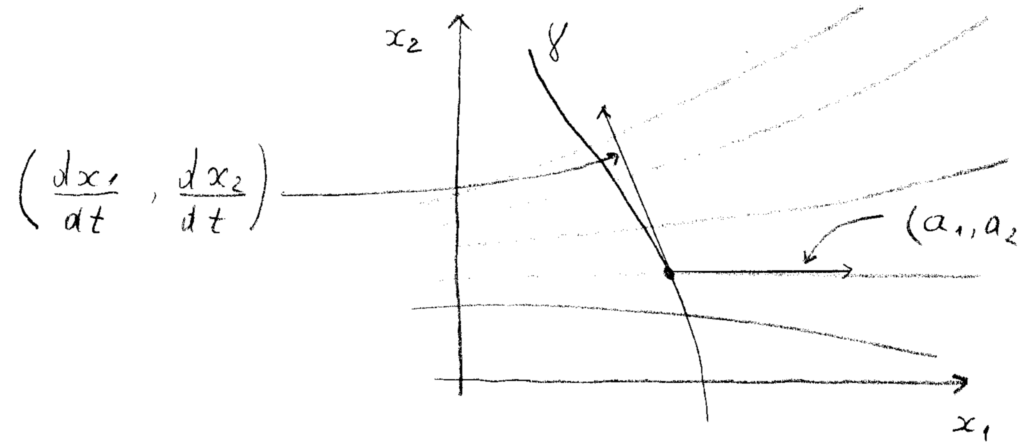


(8)

Нека $u(x_1, x_2)$ е функция. Нейната графика е повърхност в $\mathbb{R}^3 \ni (x_1, x_2, u)$ състояща се от точките $(x_1, x_2, u(x_1, x_2))$ която означаваме с $\tilde{u} \subset \mathbb{R}^3$. Очевидно $(\xi_1, \xi_2, \eta) \in \tilde{u} \Leftrightarrow \eta = u(\xi_1, \xi_2)$. Функцията $u(x_1; x_2)$ определя повърхността $\tilde{u}$ и обратно.

Ако $u(x_1, x_2)$ е решение на (5) казваме че $\tilde{u}$ е интегрална повърхност за (5). На фигура (8) ако $\tilde{u}$ е интегрална повърхност точките $(x_1(s), x_2(s), u(x_1(s), x_2(s)))$ са на еднаква "височина". Доказаните леми показват, че едно решение $u(x_1, x_2)$ е константа върху характеристиките и няма никакви ограничения за стойностите на $u(x_1, x_2)$ върху различните характеристики, освен това, че $u(x_1, x_2)$ трябва да е гладка функция. Едно решение $u = u(x_1, x_2)$ ще бъде напълно определено ако се зададе стойността му върху всяка характеристика.

Това може да бъде направено по следния начин. Нека $\gamma = (x_1(t), x_2(t))$, $t \in (a, b)$ е крива, която напречно пресича всяка характеристика само в една точка, както е показано на фигура (9) и поискаме



(9)

$u(x_1(t), x_2(t)) = u_0(t)$, където $u_0(t)$ е отнапред зададена функция дефинирана върху кривата γ. Поради поисканите свойство на кривата γ, параметърът t параметризира всички характеристики, а $u_0(t)$ е значението на решението върху характеристиката, съответствуваща на параметъра t (т.е единствената характеристика минаваща през точката $(x_1(t), x_2(t))$. Получаваме следната

<u>Теорема на Коши</u> (3). Нека е дадено линейно ЧДУ от първи ред

$$a_1(x_1, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \qquad (10)$$

и крива $\gamma : (x_1(t), x_2(t))$, $t \in (a, b)$ в $\mathbb{R}^2$ такава, че

$$\det \begin{bmatrix} a_1(x_1(t), x_2(t)) & \frac{dx_1}{dt}(t) \\ a_2(x_1(t), x_2(t)) & \frac{dx_2}{dt}(t) \end{bmatrix} \neq 0 \quad \forall t \in (a, b), \quad (11)$$

и $u_0(x_1(t), x_2(t)) \equiv u_0(t)$ е произволна гладка функция дефинирана върху γ.

Тогава в достатъчно малка околност на γ **съществува единствено** решение $u(x_1, x_2)$ на (10) такова, че $u|_\gamma = u_0$ (т.е. $u(x_1(t), x_2(t)) = u_0(t)$).

Доказателство. Разглеждаме съответната система О.Д.У.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(s) = a_1(x_1(s), x_2(s)) \\ \dot{x}_2(s) = a_2(x_1(s), x_2(s)) \end{cases} \qquad (12)$$

Тя определя общо решение от вида

$$\begin{cases} x_1 = x_1(s, \alpha_1, \alpha_2) \\ x_2 = x_2(s, \alpha_1, \alpha_2) \end{cases} \qquad (13)$$

Условието (11) показва, че върху γ векторът $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ и в достатъчно малка околност на γ минава единствена интегрална крива от вида (13). Параметрите (α_1, α_2) задаващи характеристиката минаваща през $(x_1(t), x_2(t))$ за стойност $s = 0$ се определят от системата

$$\begin{cases} x_1(0, \alpha_1, \alpha_2) = x_1(t) \\ x_2(0, \alpha_1, \alpha_2) = x_2(t) \end{cases} \qquad (14)$$

(14) определя $\alpha_1 = \alpha_1(t)$, $\alpha_2 = \alpha_2(t)$ и получаваме еднопараметрична фамилия характеристични криви

$$\begin{cases} x_1 = x_1(s, t) = x_1(s, \alpha_1(t), \alpha_2(t)) \\ x_2 = x_2(s, t) = x_2(s, \alpha_1(t), \alpha_2(t)) \end{cases} \qquad (15)$$

за които

$$\begin{cases} x_1(0, t) = x_1(t) \\ x_2(0, t) = x_2(t) \end{cases} \qquad (16)$$

Системата (15) може да се реши спрямо s и t в достатъчно малка околност на γ защото

Когато u_0 се мени, околността в която съществува решение е една и съща якобианът при $s = 0$:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s}, & \frac{\partial x_1}{\partial t} \\ \frac{\partial x_2}{\partial s} & \frac{\partial x_2}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1(x_1(t), x_2(t)) & \frac{d x_1(t)}{dt} \\ a_2(x_1(t), x_2(t)) & \frac{d x_2(t)}{dt} \end{vmatrix} \neq 0$$

благодарение на (11) и (16) и следователно е $\neq 0$ в околност на γ. Получаваме

$$\begin{aligned} s &= s(x_1, x_2) \\ t &= t(x_1, x_2) \end{aligned} \qquad (17)$$

Смисълът на (17) е следният: При зададена точка (x_1, x_2), единствената характеристика минаваща през (x_1, x_2) пресича кривата γ в точка $x_1(t), x_2(t)$, при $t = t(x_1, x_2)$. s е параметъра на характеристиката (определена от $t = t(x_1, x_2)$) за който тя минава през (x_1, x_2).

Тогава

$$u(x_1, x_2) = u_0(t(x_1, x_2)) \qquad (18)$$

е търсеното единствено решение. u е решение защото по построение (18) е константа върху характеристиките:
$u(x_1(s,t), x_2(s,t)) = u_0(t(x_1(s,t), x_2(s,t))) = u_0(t) =$
$=$ const по s (Лема 2) и е единствено, защото всяко друго решение $V(x_1, x_2)$ удовлетворяващо $V(x_1(t), x_2(t)) = u_0(t) =$
$u(x_1(t), x_2(t))$ ще съвпада с u върху всички характеристики (от Лема 1) и следователно $u(x_1, x_2) = V(x_1, x_2)$

<u>Терминология</u>. Информацията $u(x_1(t), x_2(t)) =$
$= u_0(t)$ (и нейните следващи обобщения) се наричат "<u>Данни на Коши</u>" (т.е. крива γ и функция върху нея). Проблемът за намиране

u удовлетворява условието ...
$u(x_1(t), x_2(t)) = u(x_1(0,t), x_2(0,t)) = u_0(t)$

$V(x_1, x_2) = u_0(t(x_1, x_2))$
$= u(x_1, x_2)$

на решението се нарича "задача на Коши".
В околност на γ общото решение на (10) е "много богато" (представлява безкрайно параметрична фамилия) и се описва с една произволна (гладка) функция $u_0(t)$, дефинирана върху γ.

<u>Пример</u> $\qquad \dfrac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \dfrac{\partial u}{\partial x_2} = 0$

данни на Коши: $\quad u(0,t) = \sin t$

$$\left|\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 1 \\ \dot{x}_2 &= x_2 \end{aligned}\right. \Rightarrow \left|\begin{aligned} x_1 &= s + \alpha_1 \\ x_2 &= \alpha_2 e^{s} \end{aligned}\right. \Rightarrow \text{ при } s = 0$$

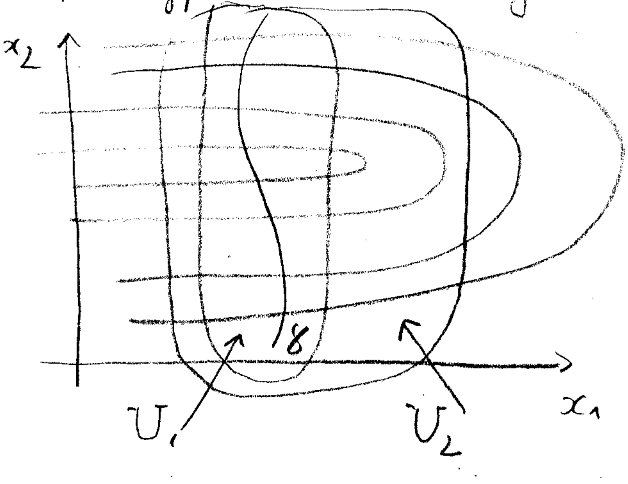
$$\left|\begin{aligned} x_1(0,\alpha_1,\alpha_2) &= \alpha_1 = 0 = x_1(t) \\ x_2(0,\alpha_1,\alpha_2) &= \alpha_2 = t = x_2(t) \end{aligned}\right. \Rightarrow \begin{aligned} \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_2 &= t \end{aligned}$$

$$\left|\begin{aligned} x_1 &= s \\ x_2 &= t e^{s} \end{aligned}\right. \Rightarrow \begin{aligned} s &= x_1 \\ t &= x_2 . e^{-s} = x_2 e^{-x_1} \end{aligned}$$

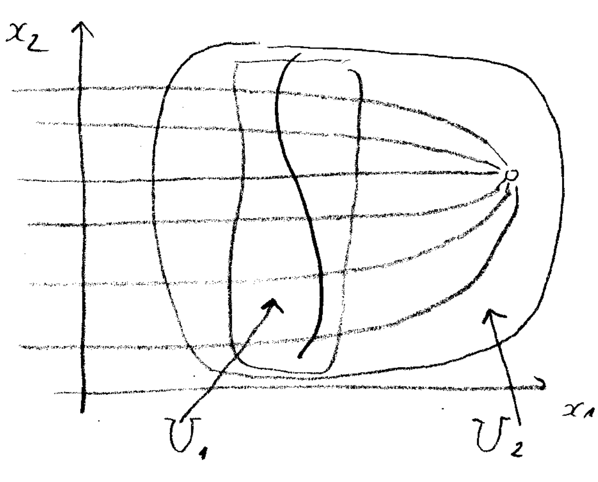
$$\Rightarrow u(x_1, x_2) = \sin(x_2 e^{-x_1})$$

■

<u>Изследване</u>. Въпросът за съществуване на глобално решение за данни на Коши върху произволна крива е сложен ( ), в цялата си общност не е решен и съдържа много много различни случаи. На следващите фигури са показани два от тях



,(19);



,(20)

На фигура (19) в U_1 теоремата на Коши е в сила но в U_2 не е в сила. Една характеристика пресича γ два пъти. Данните на Коши ще определят решение в област на решимост U_2 ако функцията $u_0(t)$ е такава, че $u_0(t_1) = u_0(t_2)$ винаги когато $(x_1(t_1), x_2(t_1))$ и $(x_1(t_2), x_2(t_2))$ са точки от една характеристика лежаща изцяло в U_2.
На фигура (20) в U_1 теоремата на Коши е в сила но в U_2 не е. Единствените данни на Коши върху γ, за които има решение в U_2, са $u_0(t) = const$

<u>Смяна на променливите и каноничен вид на линейно ЧДУ от първи ред</u>

Нека в уравнението

$$a_1(x_1, x_2)\, \partial_1 u + a_2(x_1, x_2)\, \partial_2 u = 0 \qquad (21)$$

направим смяна на променливите

$$\left| \begin{array}{l} x_1' = x_1'(x_1, x_2) \\ x_2' = x_2'(x_1, x_2) \end{array} \right. , \text{ като } \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1'}{\partial x_1} & \frac{\partial x_1'}{\partial x_2} \\ \frac{\partial x_2'}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2'}{\partial x_2} \end{vmatrix} = 0$$

съкратено $x' = x'(x)$, $x = x(x')$ — обратната трансформация. Функциите се трансформират както следва

$$\left. \begin{array}{l} u'(x') = u(x(x')) \\ u(x) = u'(x'(x)) \end{array} \right\} \text{ съкратен запис } u'(x') = u(x)$$

като автоматично се подразбира че едните променливи се изразяват чрез другите.
<u>Изчисляване</u> $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \sum_{k=1}^{2} \dfrac{\partial u'}{\partial x_k'}(x')\, \dfrac{\partial x_k'}{\partial x_i}(x)$

заместваме в (21)

$$\sum_{i=1}^{2} a_i(x) \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial u'}{\partial x'_k}(x') \cdot \frac{\partial x'_k}{\partial x_i}(x) = 0 \text{, или}$$

$$\sum_{k=1}^{2} a'_k(x') \frac{\partial u'}{\partial x'_k}(x') = 0 \qquad (22)$$

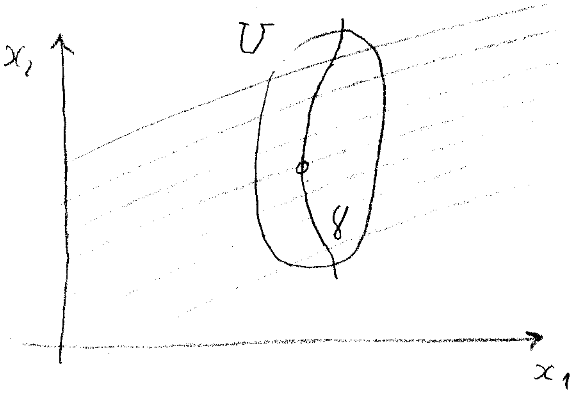
където $$a'_k(x') = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial x'_k}{\partial x_i}(x) \cdot a_i(x). \qquad (23)$$

като в дясната част на (23), съгласно уговорката, се разбира че $x = x(x')$.
В променливите x' отново имаме линейно Ч.Д.У. Коефициентите $(a_1(x), a_2(x))$ се трансформират като компоненти на <u>векторно поле</u>.

<u>Теорема</u> (4) В околност на неизродена точка (ξ_1, ξ_2) (т.е. $(a_1(\xi_1, \xi_2), a_2(\xi_1, \xi_2)) \neq (0,0)$) съществуват променливи (s, t) в които уравнението (21) добива каноничен вид

$$\frac{\partial}{\partial s} u'(s,t) = 0 \qquad (24)$$

<u>Доказателство</u>. Тъй като (ξ_1, ξ_2) е неизродена, знаем от общата теория за системи ОДУ че в околност на (ξ_1, ξ_2) през всяка точка минава точно една характеристика, както е показано на фигура (25).
Прекарваме крива γ която пресича напречно и само в една точка всяка характеристика. В достатъчно малка околност $U \ni (\xi_1, \xi_2)$ това е винаги възможно.



(25)

Нека $(x_1(t), x_2(t))$ е кривата γ.

По построение $\begin{vmatrix} a_1(x_1(t), x_2(t)) & \frac{dx_1}{dt}(t) \\ a_2(x_1(t), x_2(t)) & \frac{dx_2}{dt}(t) \end{vmatrix} \neq 0 .$ (26)

Нека

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = x_1(s, \alpha_1, \alpha_2) \\ x_2 = x_2(s, \alpha_1, \alpha_2) \end{array} \right. \qquad (27)$$

е общото решение на системата о.д.у.

$$\begin{array}{l} \dot{x}_1 = a_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = a_2(x_1, x_2) \end{array} \qquad (28)$$

Налагаме началните условия при $s = 0$

$$\left| \begin{array}{l} x_1(0, \alpha_1, \alpha_2) = x_1(t) \\ x_2(0, \alpha_1, \alpha_2) = x_2(t) \end{array} \right. \qquad (29)$$

от които намираме $\alpha_1 = \alpha_1(t)$, $\alpha_2 = \alpha_2(t)$.

По този начин характеристиките, пресичащи γ, се параметризират посредством параметъра t по кривата γ и областта U се представя като еднопараметрична фамилия характеристики

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = x_1(s, t) \\ x_2 = x_2(s, t) \end{array} \right. . \qquad (30)$$

Аналогично на теоремата на Коши, системата (30) се решава спрямо (s, t) благодарение на (26). Разглеждаме (s, t) като нови променливи

$$\left| \begin{array}{l} s = s(x_1, x_2) \\ t = t(x_1, x_2) \end{array} \right. . \qquad (31)$$

В променливите (s, t) уравнението (21) има вида

$$a_1'(s,t) \frac{\partial}{\partial s} u'(s,t) + a_2'(s,t) \frac{\partial}{\partial t} u'(s,t) = 0 , \qquad (32)$$

където, съгласно (22) и (31) имаме

$$1 = \frac{\partial s}{\partial s} = \frac{\partial s}{\partial x_1}(x) \frac{\partial x_1}{\partial s} + \frac{\partial s}{\partial x_2}(x) \frac{\partial x_2}{\partial s} =$$

$$= \frac{\partial s}{\partial x_1}(x) \cdot a_1(x) + \frac{\partial s}{\partial x_2}(x)\, a_2(x) = a_1'(s,t)$$

$$0 = \frac{\partial t}{\partial s} = \frac{\partial t}{\partial x_1}(x) \frac{\partial x_1}{\partial s} + \frac{\partial t}{\partial x_2}(x) \frac{\partial x_2}{\partial s} =$$

$$= \frac{\partial t}{\partial x_1}(x)\, a_1(x) + \frac{\partial t}{\partial x_2}(x)\, a_2(x) = a_2'(s,t)$$

Т.е., в променливи (s, γ), (32) е всъщност
$$\frac{\partial}{\partial s} u'(s,\gamma) = 0$$
Намиране на каноничния вид е еквивалентно на решаване на уравнението.

Следващата крачка е
Квазилинейно уравнение. Това е уравнение от вида

$$a_1(x_1, x_2, u)\,\partial_1 u + a_2(x_1, x_2, u)\,\partial_2 u + a(x_1, x_2, u) = 0, \quad (34)$$

където $u = u(x_1, x_2)$, a_1, a_2, a са гладки функции на три променливи. В този случай
$F(x_1, x_2, u, p_1, p_2) = a_1(x_1, x_2, u).p_1 + a_2(x_1, x_2, u)p_2 + a(x_1, x_2, u)$.
Теорията в този случай е малко по-сложна, но напълно аналогична. Отново имаме връзка със система О.Д.У.

$$\left| \begin{aligned} \dot{x}_1(s) &= a_1(x_1(s), x_2(s), u(s)) \\ \dot{x}_2(s) &= a_2(x_1(s), x_2(s), u(s)) \\ \dot{u}(s) &= -a(x_1(s), x_2(s), u(s)) \end{aligned} \right. \quad (35)$$

Решенията на (35) се наричат "интегрални криви", "характеристични криви" или "характеристики" и се разглеждат в $\mathbb{R}^3 \ni (x_1, x_2, u)$. Общото решение на (35) зависи от 3 параметъра и има вида

$$\left| \begin{aligned} x_1 &= x_1(s, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\ x_2 &= x_2(s, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\ u &= u(s, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \end{aligned} \right. \quad (36)$$

<u>Лема</u> (5) Нека $u = u(x_1, x_2)$ е решение на (34). и $(x_1(s), x_2(s), u(s))$ е характеристична крива която има обща точка с <u>интегралната повърхност</u> $\tilde{u}$. Тогава цялата характеристична крива лежи върху $\tilde{u}$.

Доказателство. По условие, за някоя стойност s_0 на параметъра, $(x_1(s_0), x(s_0), u(s_0)) \in \tilde{u} \Rightarrow$
$u(s_0) = u(x_1(s_0), x_2(s_0))$. Решението $u(x_1, x_2)$ определя система ОДУ

$$\dot{\xi}_1(s) = a_1(\xi_1, \xi_2, u(\xi_1, \xi_2))$$
$$\dot{\xi}_2(s) = a_2(\xi_1, \xi_2, u(\xi_1, \xi_2)) \qquad (37)$$

Системата има единствено решение, такова, че $\xi_1(s_0) = x_1(s_0)$ и $\xi_2(s_0) = x_2(s_0)$. След като това решение е намерено, определяме функцията $\eta(s) = u(\xi_1(s), \xi_2(s))$. Диференцирайки по s намираме

$$\dot{\eta}(s) = \partial_{x_1} u(\xi_1(s), \xi_2(s)) \cdot \dot{\xi}_1(s) + \partial_{x_2} u \cdot \dot{\xi}_2 =$$
$$= \partial_{x_1} u(\xi_1(s), \xi_2(s)) \cdot a_1(\xi_1, \xi_2, u(\xi_1, \xi_2)) + \partial_{x_2} u \cdot a_2 =$$
$$= -a(\xi_1, \xi_2, u(\xi_1, \xi_2)) = -a(\xi_1, \xi_2, \eta)$$

Виждаме, че тройката функции $\xi_1(s), \xi_2(s), \eta(s)$ удовлетворяват системата (35) и при $s = s_0$
$\xi_1(s_0) = x_1(s_0)$, $\xi_2 = x_2(s_0)$, $\eta(s_0) = u(s_0)$
Тогава $x_1(s) = \xi_1(s)$, $x_2(s) = \xi_2(s)$, $u(s) = \eta(s)$ и
$u(s) = \eta(s) = u(\xi_1(s), \xi_2(s)) = u(x_1(s), x_2(s))$
т.е. характеристиката лежи върху интегралната повърхнина $\tilde{u}$.

Лема (6) Ако $u = u(x_1, x_2)$ е функция, такава, че през всяка точка на повърхността $\tilde{u}$ минава характеристична крива която лежи изцяло върху $\tilde{u}$, тогава $u = u(x_1, x_2)$ е решение на (34).

Доказателство. Нека $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ е произволна.
Нека $(\xi_1, \xi_2, \eta) \in \tilde{u}$, т.е. $\eta = u(\xi_1, \xi_2)$
и нека $(x_1(s), x_2(s), u(s))$ е характеристична крива минаваща през (ξ_1, ξ_2, η): т.е. за някое s_0
$(x_1(s_0), x_2(s_0), u(s_0)) = (\xi_1, \xi_2, \eta)$.
Съгласно допускането имаме
$u(x_1(s), x_2(s)) = u(s) \quad \forall s$ (цялата крива лежи в/у $\tilde{u}$)

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{ds}[u(x_1(s), x_2(s)) - u(s)] =$$
$$= \partial_{x_1} u(x_1(s), x_2(s)) \frac{dx_1}{ds}(s) + \partial_{x_2} u \cdot \dot{x}_2(s) - \dot{u}(s)$$
$$\Rightarrow \partial_{x_1} u(x_1(s), x_2(s))\, a_1(x_1(s), x_2(s), u(s)) + \partial_{x_2} u \cdot a_2 + a = 0$$

при $s = s_0$ получаваме

$$\partial_{x_1} u(\xi_1, \xi_2) \cdot a_1(\xi_1, \xi_2, \eta) + \partial_{x_2} u(\xi_1, \xi_2, \eta) \cdot a_2 + a(\xi_1, \xi_2, \eta) = 0$$

Но (ξ_1, ξ_2) е произволна $(\eta = u(\xi_1, \xi_2)) \Rightarrow u(x_1, x_2)$ е решение на (34)

Извод. Всяка интегрална повърхнина $\tilde{u} \subset R^3$ е еднопараметрична фамилия от характеристики и всяка еднопараметрична фамилия от характеристики, която образува гладка повърхност, задава интегрална повърхност

Теорема (на Коши) (7)

Нека е зададено уравнението (34), крива γ: $(x_1(t), x_2(t))$, $t \in (a, b)$ в равнината (x_1, x_2) и функция $u_0(t) = u_0(x_1(t), x_2(t))$ дефинирана върху γ. Нека

$$\begin{vmatrix} a_1(x_1(t), x_2(t), u_0(t)) & \frac{dx_1}{dt}(t) \\ a_2(x_1(t), x_2(t), u_0(t)) & \frac{dx_2}{dt}(t) \end{vmatrix} \neq 0 \quad , t \in (a, b) \tag{38}$$

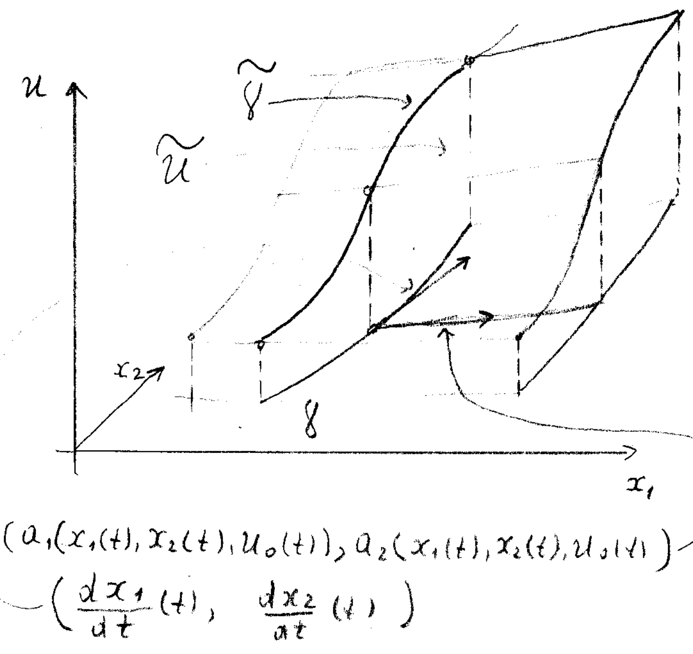
Тогава в околност на γ съществува единствено решение $u = u(x_1, x_2)$ на (34) удовлетворяващо условието

$$u(x_1(t), x_2(t)) = u_0(t) \quad . \tag{39}$$

Доказателство

Кривата γ заедно с функцията $u_0(t)$ определят крива $\tilde{\gamma}$: $(x_1(t), x_2(t), u_0(t))$ в $R^3 \ni (x_1, x_2, u)$

През всяка точка на $\tilde{\gamma}$; $(x_1(t), x_2(t), u_0(t))$ прекарваме единствената характеристика, която минава през нея при стойност на параметъра $s = 0$. Т.е. налагаме началните условия:



(40)

$$\left| \begin{array}{l} x_1(0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = x_1(t) \\ x_2(0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = x_2(t) \\ u(0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = u_0(t) \end{array} \right. \qquad (41)$$

които определят $\alpha_1 = \alpha_1(t)$, $\alpha_2 = \alpha_2(t)$, $\alpha_3 = \alpha_3(t)$ и получаваме еднопараметрична фамилия характеристики

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = x_1(s,\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t)) = x_1(s,t) \\ x_2 = x_2(s,\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t)) = x_2(s,t) \\ u = U(s,\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t)) = U(s,t) \end{array} \right. \qquad (42)$$

такава, че

$$\left| \begin{array}{l} x_1(0,t) = x_1(t) \\ x_2(0,t) = x_2(t) \\ u(0,t) = u_0(t) \end{array} \right.$$

Тази еднопараметрична фамилия характеристични криви определя двумерна повърхност $\tilde{u}$: $(x_1, x_2, u(x_1,x_2))$. Намирането на $u(x_1,x_2)$ е следното: от (42) имаме

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = x_1(s,t) \\ x_2 = x_2(s,t) \end{array} \right. , \qquad \frac{D(x_1,x_2)}{D(s,t)}(0,t) \qquad (43)$$

като

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s}(0,t) & \frac{\partial x_1}{\partial t}(0,t) \\ \frac{\partial x_2}{\partial s}(0,t) & \frac{\partial x_2}{\partial t}(0,t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1(x_1(t),x_2(t),u_0(t)) & \frac{dx_1}{dt}(t) \\ a_2(x_1(t),x_2(t),u_0(t)) & \frac{dx_2}{dt}(t) \end{vmatrix} \neq 0$$

Тогава якобианът на (43) е различен от нуло в достатъчно малка околност на γ и системата (43) може да се разреши спрямо (s,t):

$$\left| \begin{array}{l} s = s(x_1,x_2) \\ t = t(x_1,x_2) \end{array} \right. . \qquad (44)$$

Тогава търсеното решение е

$$u(x_1,x_2) = U(s(x_1,x_2), t(x_1,x_2)) \qquad (45)$$

/ в дясната страна $U(s,t)$ е от (42) /.

$u(x_1, x_2)$ е решение съгласно Лема (6). Условието (45) означава, че $(x_1, x_2, u(x_1, x_2))$ лежи на повърхнината "изтъкана" от всички характеристики минаващи през $\tilde{\gamma}$.
$u(x_1, x_2)$ удовлетворява (39) по построение.
$u(x_1, x_2)$ е единствено защото всяко друго решение $V(x_1, x_2)$ на (34) удовлетворяващо (39) ще има интегрална повърхност $\tilde{V}$ минаваща през $\tilde{\gamma}$ и съгласно Лема (5) ще се състои от същата еднопараметрична фамилия характеристики т.е. $\tilde{V} = \tilde{U} \Rightarrow V(x_1, x_2) = u(x_1, x_2)$

Коментар Смисълът на условието (38) е проекцията на характеристиката през $(x_1(t), x_2(t), u_0(t))$ в равнината (x_1, x_2) т.е. $(x_1(s), x_2(s))$ да пресича трансверзално кривата γ. Т.е. допирателните вектори $(a_1(x_1(t), x_2(t), u_0(t)), a_2(x_1(t), x_2(t), u_0(t)))$ и $\left(\frac{dx_1}{dt}(t), \frac{dx_2}{dt}(t)\right)$ да са независими.

Пример: Уравнение: $\partial_{x_1} u + x_2 \partial_{x_2} u + x_1 . u = 0$
Условие на Коши $u(0, t) = \sin t$
$/ \gamma : (0, t), \quad u_0(t) = \sin t /$

$$\left| \begin{aligned} \dot{x}_1(s) &= 1 \\ \dot{x}_2(s) &= x_2 \\ \dot{u}(s) &= -x_1 u \end{aligned} \right. \Rightarrow \left| \begin{aligned} x_1(s, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= s + \alpha_1 \\ x_2(s, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \alpha_2 e^{s} \\ u(s, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \alpha_3 e^{-\frac{1}{2}s^2 - \alpha_1 s} \end{aligned} \right.$$

$$\text{при } s = 0 \quad \left| \begin{aligned} \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_2 &= t \\ \alpha_3 &= \sin t \end{aligned} \right. \Rightarrow \left| \begin{aligned} x_1 &= x_1(s, t) = s \\ x_2 &= x_2(s, t) = t e^{s} \\ u &= u(s, t) = \sin t \, e^{-\frac{1}{2}s^2} \end{aligned} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = s \\ x_2 = t e^{s} \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} s = x_1 \\ t = x_2 e^{-x_1} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow u(x_1, x_2) = \sin(x_2 e^{-x_1}) \cdot e^{-\frac{1}{2}x_1^2}$$

<u>Коментар</u> Глобалното съществуване на решение отново е сложен и неизчерпаем въпрос.
Ако (38) е изпълнено, в дост. малка околност на γ общото решение е безкрайнопараметрична фамилия и се параметризира с произволна гладка функция на една променлива.

<u>Обобщение в случая на n- променливи</u>
Квазилинейното уравнение има вида

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x, u)\, \partial_{x_i} u + a(x, u) = 0 \qquad (46)$$

Свързаната с него система О.Д.У. е

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x}_1(s) = a_1(x_1, \dots, x_n, u) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(s) = a_n(x_1, \dots, x_n, u) \\ \dot{u}\ (s) = -a(x_1, \dots, x_n, u) \end{array} \right. \qquad (47)$$

решенията — характеристични криви в $\mathbb{R}^{n+1} \ni (x, u)$
<u>Теорема</u> (на Коши) (8)
Нека е дадено уравнението (46), $(n-1)$- мерно хиперповърхност $S: (x_1(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, x_n(t_1, \dots, t_{n-1}))$ в $\mathbb{R}^n \ni (x_1 \dots x_n)$ /параметризирана с $t_1, \dots, t_{n-1}$/, функция $u_0(t_1, \dots, t_{n-1})$ дефинирано върху S и нека

$$\begin{vmatrix} a_1(x(t_1, \dots, t_{n-1}), u_0(t_1 \dots t_{n-1})) & \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}} \\ \vdots & & & \\ a_n(x(t_1, \dots, t_{n-1}), u_0(t_1, \dots, t_{n-1})) & \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & & \frac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0$$

Тогава в достатъчно малка околност на S <u>съществува</u> <u>единствено</u> решение на (46) такова, че $u(x_1(t_1,\dots,t_{n-1}),\dots,x_n(t_1\dots t_{n-1})) = u_0(t_1,\dots,t_n)$ / т.е. $u|_S = u_0$ /.

<u>Доказателство и построение</u>

Намираме общото решение на (47)

$$\left|\begin{aligned} x_1 &= x_1(s,\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha_{n+1}) \\ &\ \vdots \\ x_n &= x_n(s,\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha_{n+1}) \\ u &= u(s,\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha_{n+1}) \end{aligned}\right. \qquad (48)$$

налагаме началното условие при $s=0$:

$$\left|\begin{aligned} x_1(0,\alpha_1,\dots\alpha_{n+1}) &= x_1(t_1,\dots,t_{n-1}) \\ &\ \vdots \\ x_n(0,\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}) &= x_n(t_1,\dots,t_{n-1}) \\ u(0,\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}) &= u_0(t_1,\dots,t_{n-1}) \end{aligned}\right.$$

определяме $\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}$ като функции на $t_1,\dots,t_{n-1}$ и заместваме в (48): получаваме

$$\left|\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1(s,t_1,\dots,t_{n-1}) \\ &\ \vdots \\ x_n &= x_n(s,t_1,\dots,t_{n-1}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} s &= s(x_1,\dots,x_n) \\ t_1 &= t_1(x_1,\dots,x_n) \\ t_{n-1} &= t_{n-1}(x_1,\dots,x_n) \end{aligned}\right\} \\ &u = u(s,t_1,\dots,t_{n-1}) \end{aligned}\right. \qquad (49)$$

От първите n уравнения на (49) определяме $(s,t_1,\dots,t_{n-1})$ като функции на $(x_1,\dots,x_n)$ /Защо това е възможно?/. и заместваме така определените $(s,t_1,\dots t_{n-1})$ в последното уравнение на (49)

$$u(x_1,\dots,x_n) = u(s(x_1,\dots,x_n),\ t_1(x_1,\dots,x_n),\dots,\ t_{n-1}(x_1,\dots,x_n)) \qquad (50)$$

е търсеното единствено решение. /Попълнете всички липсващи детайли в доказателството/.

Общ случай на нелинейно ч.д.у от първи ред за функция на две променливи

При квазилинейното уравнение $a_1\partial_1 u + a_2\partial_2 u + a = 0$ основна роля играеше характеристичната система: $\dot{x}_1 = a_1(x_1, x_2, u)$, $\dot{x}_2 = a_2$, $\dot{u} = -a$.

В общия случай на ч.д.у:

$$F(x_1, x_2, u, \partial_{x_1} u, \partial_{x_2} u) = 0, \tag{51}$$

където $F(x_1, x_2, u, p_1, p_2)$ е произволна гладка функция тя има своето обобщение.

Помощен материал

Еднопараметрична фамилия повърхнини в $\mathbb{R}^3$

С оглед на бъдещо удобство означаваме точките на $\mathbb{R}^3$ с (x_1, x_2, u). Нека $f(x_1, x_2, u, a)$ е (гладка) функция на 4 променливи. При фиксирано a, уравнението

$$f(x_1, x_2, u, a) = 0 \tag{52}$$

определя двумерна повърхност $S_a \subset \mathbb{R}^3$. Когато променяме a, повърхностите S_a са различни и ние получаваме еднопараметрична фамилия повърхнини.

Пример: Еднопараметрична фамилия сфери $a \to S_a$: сфера с център $(0, 0, a)$ и радиус $v.a$, $v \in (0,1)$. (Това са фронтовете на сферични вълни със скорост v излъчвани от точка която се движи с скорост 1)

$$S_a: \ (x_1 - 0)^2 + (x_2 - 0)^2 + (u - a)^2 = (va)^2$$

или уравнението (52) в този случай

$$x_1^2 + x_2^2 + u^2 - 2au + a^2(1 - v^2) = 0 \tag{53}$$

<u>Пресечница на две безкрайно близки повърхнини съответстваща на параметъра a</u>.

"Изобщо" две повърхнини в $\mathbb{R}^3$ се пресичат в крива. Пресечницата $S_a \cap S_{a+\delta a}$ е крива която, при фиксирано a, зависи от δa. Нейната граница при $\delta a \to 0$ се нарича пресечница на две безкрайно близки повърхнини, съответстваща на параметъра a.

<u>Система уравнения</u>. Пресечницата $S_a \cap S_{a+\delta a}$ има система уравнения

$$\left| \begin{aligned} & f(x_1, x_2, u, a) = 0 \\ & f(x_1, x_2, u, a+\delta a) = 0 \end{aligned} \right.$$

Второто уравнение може да се представи като:

$$0 = f(x_1, x_2, u, a) + \partial_a f(x_1, x_2, u, a)\delta a + R(x_1, x_2, u, a, \delta a)(\delta a)^2$$

където R е гладка функция на на 5 променливи

от $f(x_1, x_2, u, a) = 0 \Rightarrow$

$$0 = \partial_a f(x_1, x_2, a, u) \cdot \cancel{\delta a} + R(x_1, x_2, u, \overset{a}{\vee}, \delta a) \cdot (\delta a)^{\cancel{2}}$$

При граничен преход $\delta a \to 0$ остава само

$$\partial_a f(x_1, x_2, u, a) = 0$$

Получихме: Система уравнение за пресечница на безкрайно близки повърхнини е

$$\left| \begin{aligned} & f(x_1, x_2, u, a) = 0 \\ & \partial_a f(x_1, x_2, u, a) = 0 \end{aligned} \right. \qquad (55)$$

<u>Пример</u> За еднопараметричната фамилия (53) получаваме:

$$\left| \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 + u^2 - 2a.u + a^2(1-v^2) = 0 \\ -2u + 2a(1-v^2) = 0 \end{array} \right. \qquad \Rightarrow u = a(1-v^2) = const$$

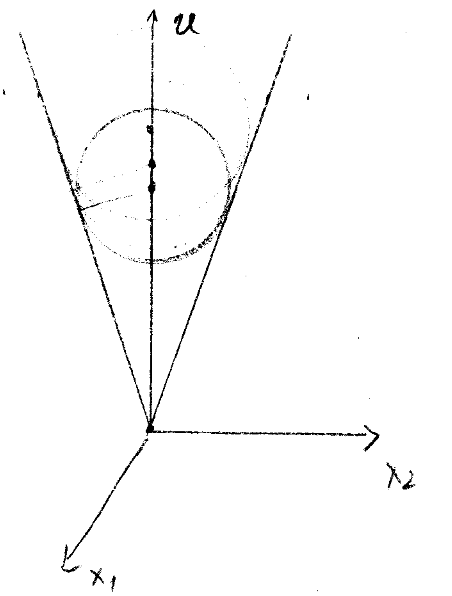
$$x_1^2 + x_2^2 + a^2(1-v^2)^2 - \overset{1}{2}a^2(1-v^2) + \cancel{a^2(1-v^2)} = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 + a^2(1 - 2v^2 + v^4 - 1 + v^2) = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 = a^2 v^2 (1-v^2) \qquad \text{или} \quad \rho = a.v.\sqrt{1-v^2}$$

където $\rho^2 = x_1^2 + x_2^2$. Пресечницата на две безкрайно близки сфери от тази фамилия, съответствуваща на a е окръжност в равнината $u = a(1-v^2)$ и радиус $\rho = a.v.\sqrt{1-v^2}$.

Решенията на (55) образуват еднопараметрична фамилия криви които определят една повърхнина. В нашия пример това са еднопараметрична фамилия окръжности които образуват конус обвиващ еднопараметричната фамилия от сфери (конус на Мах) – както е показано на чертежа



По този начин стигаме до понятието

Обвивка на еднопараметрична фамилия повърхнини наричаме повърхнина S която не е повърхнина от фамилията ($S_a \neq S$ за $\forall a$) и във всяка своя точка се допира до някоя повърхнина S_a от фамилията.

Уравнение за обвивката S се получава като от системата (алгебрични) уравнения

$$\left| \begin{array}{l} f(x_1, x_2, u, a) = 0 \\ \partial_a f(x_1, x_2, u, a) = 0 \quad \to a = a(x_1, x_2, u) \end{array} \right. \qquad (56)$$

изключим a. (Примерно от второто уравнение определим $a = a(x_1, x_2, u)$ и заместим в първото:

$$g(x_1, x_2, u) = f(x_1, x_2, u, a(x_1, x_2, u)) = 0 \; . \qquad (57)$$

Доказателство

Нека S е повърхност определена от (57) и нека $(\xi_1, \xi_2, \eta) \in S \Leftrightarrow f(\xi_1, \xi_2, \eta, a(\xi_1, \xi_2, \eta)) = 0$ тогава $(\xi_1, \xi_2, \eta) \in S_{a(\xi_1, \xi_2, \eta)} \equiv S_{a_0}$,

$a_0 = a(\xi_1, \xi_2, \eta)$. Двете повърхности S и S_{a_0} се допират в общата си точка (ξ_1, ξ_2, η). Трябва да покажем, че градиентите на функциите определящи S и S_{a_0} (g от (57) и $f(x_1, x_2, u, a_0)$) ~~съвпадат~~ колинеарни в тази точка

$$\partial_{x_1} g(\xi_1, \xi_2, \eta) = \partial_{x_1}[f(x_1, x_2, u, a(x_1, x_2, u))]\Big|_{(\xi_1, \xi_2, \eta)} =$$

$$= \partial_{x_1} f(\xi_1, \xi_2, \eta, a_0) + \underbrace{\partial_a f(\xi_1, \xi_2, \eta, a_0)}_{=0} \partial_{x_1} a(\xi_1, \xi_2, \eta) =$$

$$= \partial_{x_1} f(\xi_1, \xi_2, \eta, a_0) = \partial_{x_1} f(x_1, x_2, u, a_0)\Big|_{(\xi_1, \xi_2, \eta)} .$$

Аналогично и за останалите производни.
$\Rightarrow$ Уравнението (57) определя обвивката S.

<u>Пример</u> (конус на Мах) за еднопараметричната фамилия (53) получаваме

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + u^2 - 2au + a^2(1-v^2) = 0 \\ -2u + 2a(1-v^2) = 0 \end{cases} \longrightarrow a = \frac{u}{1-v^2}$$

$$x_1^2 + x_2^2 + u^2 - \frac{2u^2}{1-v^2} + \frac{u^2}{(1-v^2)^{\cancel{2}}}\cancel{(1-v^2)} = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 = u^2 \frac{v^2}{1-v^2} \quad \text{или} \quad \rho = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \cdot u$$

това е уравнението на конуса на Мах.

<u>Коментар</u>. Възможно е една еднопараметрична фамилия да няма обвивка и пресечница на безкрайно близки повърхнини. Например

$$f(x_1, x_2, u, a) = u - a = 0$$

S_a е равнината $u = a$. и уравнението (56) няма решение. Ние мълчаливо приемаме че необходимите условия за съществуване на обвивка и пресечници са изпълнени.

<u>Геометрична интерпретация на ЧДУ от първи ред</u>

Нека $u = u(x_1, x_2)$ е функция. Тя определя (и се определя от) своята графика
$\tilde{u} : \{ x_1, x_2, u(x_1, x_2) \} \in \mathbb{R}^3$. Този запис се схваща като задаване на повърхност $\tilde{u}$ посредством двата параметъра (x_1, x_2) които пробягват $\mathbb{R}^2$, (или област на решимост).

Същата повърхност $\tilde{U}$ може да и е уравнение $\Phi(x_1, x_2, u) = 0$, като очевидно можем да изберем

$$\Phi(x_1, x_2, u) = u(x_1, x_2) - u = 0$$

(В изрази като този буквата "u" участва два пъти, $u(x_1, x_2)$ е функцията която сме задали, докато само u е третата координата в $\mathbb{R}^3$ (Ако $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2$, $x_1 + x_2^2 - u = 0$ е уравнение на графика)

Нека $(\xi_1, \xi_2, \eta) \in \tilde{U}$ е точка от $\tilde{U}$, т.е. $\eta = u(\xi_1, \xi_2)$. През (ξ_1, ξ_2, η) минава равнина допирателна към $\tilde{U}$. Векторът $\operatorname{grad} \Phi(\xi_1, \xi_2, \eta) = \operatorname{grad}(u(x_1, x_2) - u)\big|_{(\xi_1, \xi_2, \eta)} = (\partial_1 u(\xi_1, \xi_2), \partial_2 u(\xi_1, \xi_2), -1)$ е перпендикулярен на $\tilde{U}$ и оттук следва уравнението на допирателната равнина

$$(x_1 - \xi_1) . p_1 + (x_2 - \xi_2) . p_2 + (u - \eta) . (-1) = 0 , \qquad (58)$$

където е положено $p_1 = \partial_{x_1} u(\xi_1, \xi_2)$, $p_2 = \partial_{x_2} u(\xi_1, \xi_2)$.

Коментар

Частните производни p_1, p_2 на $u(x_1, x_2)$ в точката (ξ_1, ξ_2) определят (и се определят) от допирателната равнина към $\tilde{U}$ в точката (ξ_1, ξ_2, η). В този смисъл "частните производни на u в (ξ_1, ξ_2)" и "допирателна равнина към $\tilde{U}$ в (ξ_1, ξ_2, η)" носят едно и съща информация. Всяко условие върху частните производни е и условие върху допирателните към $\tilde{U}$ равнини.

Нека $(\xi_1,\xi_2,\eta)\in\mathbb{R}^3$ е фиксирана точка. През (ξ_1,ξ_2,η) минава двупараметрична фамилия от равнини – тези с уравнение (58) където p_1 и p_2 са произволни. Ако $u(x_1,x_2)$ е произволна функция, чиято графика минава през (ξ_1,ξ_2,u) (т.е. $\eta=u(\xi_1,\xi_2)$) върху p_1 и p_2 няма никакви ограничения. Каквито и стойности да дадем на p_1 и p_2 винаги съществува функция такава, че $\eta=u(\xi_1,\xi_2)$ и $p_i=\partial_{x_i}u(\xi_1,\xi_2)$, $i=1,2$. Но ако u е решение, p_1 и p_2 не могат да бъдат произволни. Трябва да бъде изпълнено

$$F(x_1,x_2,u(x_1,x_2),\partial_{x_1}u(x_1,x_2),\partial_{x_2}u(x_1,x_2))=0 \qquad (59)$$

тъждествено по (x_1,x_2) в частност и при (ξ_1,ξ_2):

$$F(\xi_1,\xi_2,\eta,p_1,p_2)=0 \qquad (60)$$

Наричаме графиките й на решенията: интегрални повърхнини. Една равнина минаваща през точката (ξ_1,ξ_2,η) се нарича интегрална ако е допирателна към интегрална повърхнина минаваща през тази точка.

Интегралните равнини през (ξ_1,ξ_2,u) имат вида (58) където (p_1,p_2) удовлетворяват (60). ~~Очевидно~~. Очевидно една повърхност й в $\mathbb{R}^3$ е интегрална ако допирателната равнина към всяка точка е интегрална (Това е тривиално. Ние само си казахме че ако заместим $u=u(x_1,x_2)$, $p_i=\partial_{x_i}u(x_1,x_2)$, $i=1,2$, в $F(x_1,x_2,u,p_1,p_2)$ ще получим тъждество).

Уравнението (60) е едно алгебрично уравнение за две променливи: p_1 и p_2 (защото (ξ_1, ξ_2, η) е фиксирана точка) то определя еднопараметрична фамилия решения $p_1(\lambda)$, $p_2(\lambda)$:

$$F(\xi_1, \xi_2, \eta, p_1(\lambda), p_2(\lambda)) = 0 \qquad (61)$$

тъждествено по λ. Тогава уравнението

$$(x_1 - \xi_1)\, p_1(\lambda) + (x_2 - \xi_2)\, p_2(\lambda) + (u - \eta)(-1) = 0 \qquad (62)$$

определя еднопараметричната фамилия на всички интегрални равнини през (ξ_1, ξ_2, η)

<u>Пример</u>

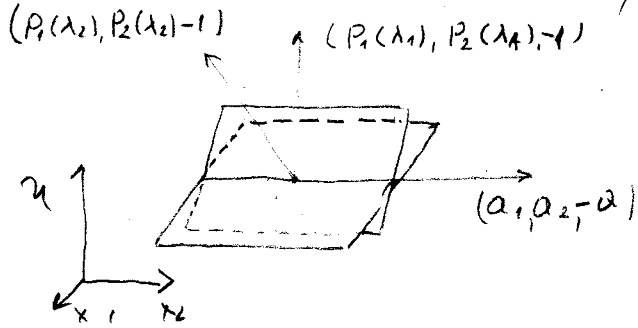
За <u>квазилинейното</u> уравнение имаме:

$$F(x_1, x_2, u, p_1, p_2) = a_1(x_1, x_2, u)\, p_1 + a_2(x_1, x_2, u)\, p_2 + a(x_1, x_2, u)$$

и уравнението (61) се записва като

$$a_1(\xi_1, \xi_2, \eta) \cdot p_1(\lambda) + a_2(\xi_1, \xi_2, \eta) \cdot p_2(\lambda) + (-a(\xi_1, \xi_2, \eta)) \cdot (-1) = 0$$

т.е. векторът $(a_1(\xi_1, \xi_2, \eta), a_2, -a)$ е ортогонален на $(p_1, p_2, -1)$. Интегралните равнини през (ξ_1, ξ_2, η) определени от (62) представляват сноп равнини минаващи през фиксирана права, определена от точката $(\xi_1\ \xi_2\ \eta)$ и направлението $(a_1, a_2, -a)$ както е показано на чертежа. Направлението на общата права: $(a_1, a_2, -a)$ е дясната част на характеристичната система.



В този пример тя е пресечница на всички интегрални равнини през (ξ_1, ξ_2, η).

Уравнението (62) определя еднопараметрична фамилия равнини. Нека намерим тяхната обвивка. Записваме системата уравнения

$$\begin{cases} (x_1-\xi_1)p_1(\lambda)+(x_2-\xi_2)p_2(\lambda)+(u-\eta)(-1)=0 \\ (x_1-\xi_1)\dot p_1(\lambda)+(x_2-\xi_2)\dot p_2(\lambda)=0 \end{cases}$$

Но от (61), след диференциране по λ:

$$\partial_{p_1}F\cdot\dot p_1(\lambda)+\partial_{p_2}F\cdot\dot p_2(\lambda)=0$$

$$\Rightarrow\quad \frac{x_1-\xi_1}{x_2-\xi_2}=-\frac{\dot p_2(\lambda)}{\dot p_1(\lambda)}=\frac{\partial_{p_1}F}{\partial_{p_2}F}.$$

Получаваме еквивалентна система за обвивката

$$\begin{cases} (x_1-\xi_1)p_1(\lambda)+(x_2-\xi_2)p_2(\lambda)+(u-\eta)(-1)=0 \\ -(x_1-\xi_1)\partial_{p_2}F(\xi_1,\xi_2,\eta,p_1(\lambda),p_2(\lambda))+(x_2-\xi_2)\partial_{p_1}F=0 \end{cases} \qquad (63)$$

Пресечница на две безкрайно близки интегрални равнини съответстваща на параметъра λ е права крива определена от (63) при фиксиране на λ.
Но системата (63) е от две линейни уравнения. Те определят две равнини имащи обща точка (ξ_1,ξ_2,η) и съответно нормални вектори $(p_1,p_2,-1)$ и $(-\partial_{p_2}F,\ \partial_{p_1}F,\ 0)$. Системата (63) определя права през (ξ_1,ξ_2,η) имаща направление

$$(p_1,p_2,-1)\times(-\partial_{p_2}F,\ \partial_{p_1}F,\ 0)=(\partial_{p_1}F,\ \partial_{p_2}F,\ p_1\partial_{p_1}F+p_2\partial_{p_2}F). \qquad (64)$$

Получихме следното: Пресечниците на безкрайно близки равнини от еднопараметричната фамилия (62) са прави през (ξ_1, ξ_2, η) с направление $(\partial_{p_1}F, \partial_{p_2}F, p_1\partial_{p_1}F + p_2\partial_{p_2}F)$. Обвивката на същата фамилия се състои всички пресечници на безкрайно близки равнини. Това е повърхност "изтъкана" от прави минаващо през една точка: Те са образуващи на криволинеен конус, който се нарича конус на Монж в точката (ξ_1, ξ_2, η). Всяка (интегрална) равнина от фамилията (62) се допира до конуса на Монж по цяла образуваща. и всяка равнина през точката (ξ_1, ξ_2, η) която се допира до конуса на Монж (задължително по цяла образуваща) е интегрална равнина (през (ξ_1, ξ_2, η)). Това дава критерий една равнина през (ξ_1, ξ_2, η) е интегрална тогава и само тогава когато се допира до конуса на Монж в тази точка.

Геометрично едно Ч.Д.У. определено от функция $F(x_1, x_2, \eta, p_1, p_2)$ може да се представи като задаване във всяка точка $(\xi_1, \xi_2, \eta) \in \mathbb{R}^3$ на един конус определен от F посредством (63). Една повърхност $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ е интегрална, ако във всяка своя точка се допира до конуса на Монж в тази точка.

Конусът на Монж дава пък за обобщение на характеристичната система (35) при квазилинейното уравнение. При квазилинейното уравнение, както видехме на примера, интегралните равнини през (ξ_1, ξ_2, η) образуват снои равнини минаващи през обща права.

Конусът на Монж е изроден до тази права. Тя има направление $(a_1, a_2, -a)$ което е дясната част на характеристичната система. Обобщението от квазилинейния, към общия случай е да заменим обвивката пресечницата на всички интегрални равнини през (ξ_1, ξ_2, η) с пресечницата на безкрайно близки интегрални повърхнини (образуващата на конуса на Монж). Образуващите сега са еднопараметрична фамилия и имат направления (64). В (35) заменяме дясната част с направлението на образуващите:

$$\left|\begin{aligned} \dot{x}_1(s) &= \partial_{p_1}F(x_1(s), x_2(s), u(s), p_1(s), p_2(s)) \\ \dot{x}_2(s) &= \partial_{p_2}F(x_1(s) \ldots p_2(s)) \\ \dot{u}(s) &= p_1(s)\,\partial_{p_1}F(x_1(s), \ldots, p_2(s)) + p_2(s)\,\partial_{p_2}F \end{aligned}\right. \qquad (65)$$

$$F(x_1(s), x_2(s), u(s), p_1(s), p_2(s)) = 0 \qquad (66)$$

Уравнението (66) е необходимо за да бъде дясната част на (65) характеристично направление, т.е. направление на образуваща на конуса на Монж. (да бъде изпълнено (61)). Само в квазилинейния случай зависимостта от p_1 и p_2 в дясната част на (65) изчезва и (65) и (66) са еквивалентни на (35). Крива в 5-мерното пространство на променливите (x_1, x_2, u, p_1, p_2) се нарича *фокална* ако удовлетворява (65) и (66). Очевидно системата ОДУ (65) не е пълна. Тя може да се допълни, ако към фокалните криви се прибавят допълнителни условия.

Казваме, че една фокална крива е съгласувана с решение $u(x_1, x_2)$ на (51) ако е изпълнено

$$u(s) = u(x_1(s), x_2(s)) \qquad (67)$$

$$\begin{cases} p_1(s) = \partial_{x_1} u(x_1(s), x_2(s)) \\ p_2(s) = \partial_{x_2} u(x_1(s), x_2(s)) \end{cases} \qquad (68)$$

За фокални криви от този тип, системата (65) може да се допълни до пълна, в смисъл да се добавят две нови уравнения които се удовлетворяват от всяка фокална крива съгласувана с решение.
Първо, (67) и (68) са непротиворечиви с (65) и (66)
Първите две уравнения се превръщат в пълна система ОДУ за $x_i(s)$, $i = 1,2$

$$\dot{x}_i(s) = \partial_{p_i} F(x_1(s), x_2(s), u(x_1(s), x_2(s)), \partial_{x_1} u(x_1(s), x_2(s)),$$
$$\partial_{x_2} u(x_1(s), x_2(s))), \quad i = 1,2. \qquad (69)$$

(66) е автоматично изпълнено при избора (67), (68), защото $u(x_1, x_2)$ е решение. Третото уравнение на (65) не противоречи на (67). Ако диференцираме (67) по s:

$$\dot{u}(s) = \partial_{x_1} u(x_1(s), x_2(s)) \cdot \dot{x}_1(s) + \partial_{x_2} u(x_1(s), x_2(s)) \cdot \dot{x}_2(s) =$$
$$= p_1(s)\, \partial_{p_1} F + p_2(s)\, \partial_{p_2} F$$

Новите уравнения получаваме от (68) като диференцираме по s.

$$\dot{p}_1(s) = \frac{d}{ds}\left(\partial_{x_1} u(x_1(s), x_2(s)) \right) =$$
$$= \partial_{x_1} \partial_{x_1} u(x_1(s), x_2(s)) \cdot \dot{x}_1(s) + \partial_{x_2} \partial_{x_1} u(x_1(s), x_2(s)) \cdot \dot{x}_2(s) =$$

$$= \partial_{p_1} F(x_1(s), \dots, p_2(s))\, \partial_{x_1}\partial_{x_1} u(x_1(s), x_2(s)) + \partial_{p_2} F .\, \partial_{x_2}\partial_{x_1} u .$$

Но $u(x_1, x_2)$ е решение, следователно

$$F(x_1, x_2, u(x_1,x_2), \partial_{x_1} u(x_1,x_2), \partial_{x_2} u(x_1,x_2)) = 0$$

Диференцираме по x_1

$$\Rightarrow \partial_{x_1} F(x_1, x_2, u(x_1,x_2), \partial_{x_1} u(x_1,x_2), \partial_{x_2} u) + \partial_u F .\, \partial_{x_1} u +$$
$$+ \partial_{p_1} F .\, \partial_{x_1}\partial_{x_1} u + \partial_{p_2} F .\, \partial_{x_2}\partial_{x_1} u = 0 \qquad (70)$$

Равенството (70) е вярно за всяко (x_1, x_2), следователно и за $x_1(s)$, $x_2(s)$. Сравнявайки подчертаните изрази и отчитайки (67) и (68) получаваме

$$\dot{p}_1(s) = -\partial_{x_1} F(x_1(s), \dots, p_2(s)) - p_1(s)\, \partial_u F .$$

Аналогично и за p_2. Окончателно получаваме, че фокалните криви съответстващи с решения удовлетворяват системата ОДУ

$$\left|\begin{array}{l} \dot{x}_1(s) = \partial_{p_1} F(x_1(s), \dots, p_2(s)) \\ \dot{x}_2(s) = \partial_{p_2} F(x_1(s), \dots, p_2(s)) \\ \dot{u}(s) = p_1 \partial_{p_1} F + p_2 \partial_{p_2} F \\ \dot{p}_1(s) = -\partial_{x_1} F - p_1 \partial_u F \\ \dot{p}_2(s) = -\partial_{x_2} F - p_2 \partial_u F \end{array}\right. \qquad (71)$$

$$F(x_1(s), x_2(s), u(s), p_1(s), p_2(s)) = 0 \qquad (72)$$

Системата ОДУ (71) се нарича система на Лагранж - Шарпи. Тя се определя от функцията $F(x_1 \dots p_2)$, т.е. от нелинейното ЧДУ. Нейните решения са криви в

5-мерното пространство на променливите (x_1, x_2, u, p_1, p_2).

<u>Лема</u>

Функцията $F(x_1, \dots, p_2)$ е първи интеграл на системата на Лагранж-Шарпи

<u>Доказателство</u>

Нека $(x_1(s), \dots, p_2(s))$ е решение на (71)

$$\frac{d}{ds} F(x_1(s), x_2(s), u(s), p_1(s), p_2(s)) =$$

$$= \partial_{x_1} F \cdot \dot{x}_1 + \partial_{x_2} F \cdot \dot{x}_2 + \partial_u F \cdot \dot{u} + \partial_{p_1} F \cdot \dot{p}_1 + \partial_{p_2} F \cdot \dot{p}_2 =$$

$$= \partial_{x_1} F \cdot \partial_{p_1} F + \partial_{x_2} F \cdot \partial_{p_2} F + \partial_u F \cdot (p_1 \partial_{p_1} F + p_2 \cdot \partial_{p_2} F) +$$
$$+ \partial_{p_1} F \cdot (-\partial_{x_1} F - p_1 \partial_u F) + \partial_{p_2} F \cdot (-\partial_{x_2} F - p_2 \partial_u F) = 0$$

Решенията на (71) които удовлетворяват (72) се наричат <u>"характеристични криви"</u>, или <u>"характеристики"</u>

Алгебричното уравнение (72) определя в R^5 4-мерна хиперповърхност която може да се представи като 3-параметрична фамилия от (непресичащи се) характеристики

Съществува един интуитивно ясен способ за представяне на характеристиките. Нека $(x_1(s), \dots, p_2(s))$ е крива в R^5. Първите три компоненти $(x_1(s), x_2(s), u(s))$ определят крива в R^3. Последните две компоненти $p_1(s), p_2(s)$ могат да се представят като превъзъвнице, минаващо през $(x_1(s), x_2(s), u(s))$ и

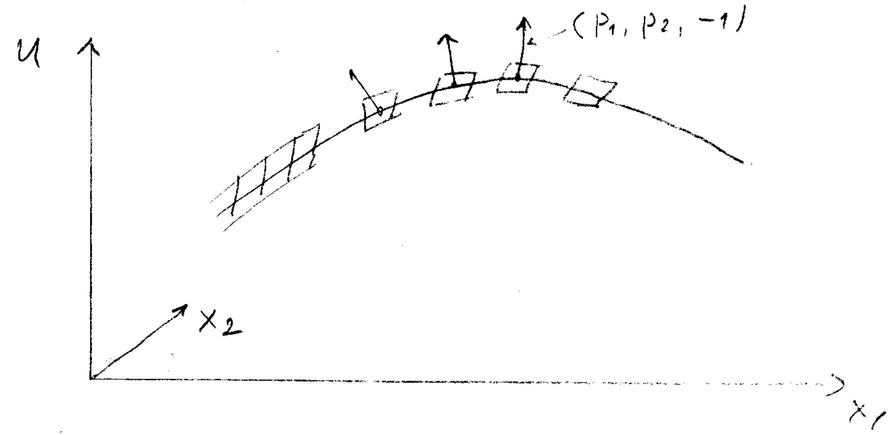
имащо нормален вектор $(p_1(s), p_2(s), -1)$.
Ако кривата е характеристика, ще бъде изпълнено

$$\dot{u}(s) = p_1 \cdot \partial_{p_1} F + p_2 \cdot \partial_{p_2} F = p_1 \cdot \dot{x}_1 + p_2 \cdot \dot{x}_2$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}_1 \cdot p_1 + \dot{x}_2 \cdot p_2 + \dot{u} \cdot (-1) = 0$$

т.е. векторите $(\dot{x}_1(s), \dot{x}_2(s), \dot{u}(s))$ и $(p_1(s), p_2(s), -1)$ са ортогонални и правоъгълничето минаващо през $(x_1(s), x_2(s), u(s))$ е допирателно към кривата.
При тази интерпретация, характеристиката се нарича ивица и геометрично се изобразява както е показано на чертежа

Ивицата винаги остава допирателна към кривата и може само да се усуква около нея



Лема

Нека $u(x_1, x_2)$ е решение на

$$F(x_1, x_2, u, \partial_{x_1} u, \partial_{x_2} u) = 0$$

и $(x_1(s), \ldots, p_2(s))$ е характеристика, такава, че за някоя стойност $s = s_0$ на параметъра е вярно

$$\begin{aligned} u(s_0) &= u(x_1(s_0), x_2(s_0)) \\ p_i(s_0) &= \partial_{x_i} u(x_1(s_0), x_2(s_0)), \quad i = 1,2. \end{aligned} \tag{73}$$

Тогава за всяко s е изпълнено

$$\begin{aligned} u(s) &= u(x_1(s), x_2(s)) \\ p_1(s) &= \partial_{x_1} u(x_1(s), x_2(s)) \\ p_2(s) &= \partial_{x_2} u(x_1(s), x_2(s)). \end{aligned} \tag{74}$$

Доказателство

Разглеждаме решение $\xi_1(s), \xi_2(s)$ на системата (69):

$$\dot{\xi}_1(s) = \partial_{p_1} F(\xi_1(s), \xi_2(s), u(\xi_1, \xi_2), \partial_{x_1} u(\xi_1, \xi_2), \partial_{x_2} u(\xi_1, \xi_2))$$
$$\dot{\xi}_2(s) = \partial_{p_2} F(\xi_1(s), \xi_2(s), u(\xi_1, \xi_2), \partial_{x_1} u(\xi_1, \xi_2), \partial_{x_2} u(\xi_1, \xi_2))$$

удовлетворяващо началното условие

$$\xi_1(s_0) = x_1(s_0)$$
$$\xi_2(s_0) = x_2(s_0)$$

Тогава от извода на (71) знаем, че $(\xi_1(s), \xi_2(s))$ заедно с:

$$\eta(s) = u(\xi_1(s), \xi_2(s))$$
$$\zeta_1(s) = \partial_{x_1} u(\xi_1(s), \xi_2(s)) \qquad (75)$$
$$\zeta_2(s) = \partial_{x_2} u(\xi_1(s), \xi_2(s))$$

определят характеристика, т.е. решение на (71), (72). Но по условие $(x_1(s), \dots, p_2(s))$ е характеристика и от допускането, че при $s = s_0$ е изпълнено (74) получаваме

$$\eta(s_0) = u(\xi_1(s_0), \xi_2(s_0)) = u(x_1(s_0), x_2(s_0)) = u(s_0)$$
$$\zeta_i(s_0) = \partial_{x_i} u(\xi_1(s_0), \xi_2(s_0)) = \partial_{x_i} u(x_1(s_0), x_2(s_0)) = p_i(s_0),$$
$$i = 1, 2.$$

Двете решения $(x_1(s) \dots p_2(s))$ и $(\xi_1(s), \dots, \zeta_2(s))$ имат еднакви начални данни и съвпадат за всяко s. И (75) което е вярно по конструкция се превръща в (74).

Коментар

Ако една ивица прилепне към интегралната повърхност $\tilde{u}$ в една точка тя прилепва към интегралната повърхност изцяло.

(нелинейна ивица)

Теорема на Коши

Нека е зададено нелинейно ЧДУ определено от функцията $F(x_1, x_2, u, p_1, p_2)$. Нека $\gamma: (x_1(t), x_2(t))$ $t \in (a, b)$ е крива, $u_0(t) = u_0(x_1(t), x_2(t))$ произволна (гладка) функция дефинирана върху γ и

$$\det \begin{vmatrix} \partial_{p_1} F(x_1(t), x_2(t), u(t), p_1, p_2) & \dot{x}_1(t) \\ \partial_{p_2} F(x_1(t), x_2(t), u(t), p_1, p_2) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix} \neq 0, \quad t \in (a, b) \tag{76}$$

В достатъчно малка околност на γ съществува единствено решение $u = u(x_1, x_2)$ удовлетворяващо условието

$$u(x_1(t), x_2(t)) = u_0(t) \tag{77}$$

Доказателство

Ще построим решението като използваме характеристиките определени от системата на Лагранж-Шарпи.

Намираме общото решение на (71).

$$x_1 = x_1(s, \alpha_1 \ldots \alpha_5), \ldots, \quad p_2 = p_2(s, \alpha_1 \ldots \alpha_5) \tag{78}$$

Определяме $p_1(t)$, $p_2(t)$ от алгебричната система

$$\begin{cases} p_1 \cdot \dot{x}_1(t) + p_2 \cdot \dot{x}_2(t) - \dot{u}_0(t) = 0 \\ F(x_1(t), x_2(t), u_0(t), p_1, p_2) = 0 \end{cases} \tag{79}$$

$p_i(t) = \partial_{x_i} u(x_1(t); x_2(t))$. Началното условие (77) фактът че $u(x_1, x_2)$ е решение позволява да определим $\partial_{x_1} u$ и $\partial_{x_2} u$ върху точките на γ.

Понякога решаването на (79) се нарича "намиране на началната ивица. Благодарение на (76) системата (78) е решима в околност на γ. Предполагаме че решението е единствено.
Налагаме начални условия при $s = 0$

$$\left|\begin{array}{l} x_1(0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = x_1(t) \\ x_2(0, \alpha_1, \dots, \alpha_5) = x_2(t) \\ u(0, \alpha_1, \dots, \alpha_5) = u_0(t) \\ p_1(0, \alpha_1, \dots, \alpha_5) = p_1(t) \\ p_2(0, \alpha_1, \dots, \alpha_5) = p_2(t) \end{array}\right. \qquad (79)$$

Определяме константите:
$\alpha_1 = \alpha_1(t)$, $\alpha_2 = \alpha_2(t), \dots, \alpha_5 = \alpha_5(t)$ и ги заместваме в общото решение (78). Получаваме еднопараметрична фамилия характеристики

$$\left|\begin{array}{l} x_1 = x_1(s, t) \\ x_2 = x_2(s, t) \\ u = u(s, t) \\ p_1 = p_1(s, t) \\ p_2 = p_2(s, t) \end{array}\right. \qquad (80)$$

Ще покажем, че еднопараметричната фамилия криви $(x_1(s,t), x_2(s,t), u(s,t))$ образуват интегралната повърхност на търсеното решение.
Решаваме първите две уравнения спрямо s и t:

$$\left|\begin{array}{l} x_1 = x_1(s, t) \\ x_2 = x_2(s, t) \end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l} s = s(x_1, x_2) \\ t = t(x_1, x_2) \end{array}\right. \qquad (81)$$

В достатъчно малка околност на γ това е възможно, защото якобианът е равен на (76).

$$\left|\begin{matrix} \frac{\partial x_1}{\partial s} & \frac{\partial x_1}{\partial t} \\ \frac{\partial x_2}{\partial s} & \frac{\partial x_2}{\partial t} \end{matrix}\right|_{s=0} = \left|\begin{matrix} \partial_{p_1} F(x_1(t), x_2(t), u_0(t), p_1(t), p_2(t)) & \dot{x}_1(t) \\ \partial_{p_2} F(x_1(t), x_2(t), u_0(t), p_1(t), p_2(t)) & \dot{x}_2(t) \end{matrix}\right| \neq 0$$

Търсеното решение е

$$u(x_1, x_2) = u(s(x_1, x_2), t(x_1, x_2)) . \qquad (82)$$

Използвайки обратимата смяна (81) може (еквивалентно) да запишем:

$$u(s,t) = u(x_1(s,t), x_2(s,t)) . \qquad (83)$$

<u>Помощна лема</u>

В сила са равенствата

$$p_i(s,t) = \partial_{x_i} u(x_1(s,t), x_2(s,t)) \qquad (84)$$

където $u(x_1, x_2)$ е определено от (82).

<u>Док.</u> От (83), диференцирайки по s, t получаваме

$$\left| \begin{aligned} \partial_s u(s,t) &= \partial_{x_1} u(x_1(s,t), x_2(s,t)) \cdot \frac{\partial x_1}{\partial s} + \partial_{x_2} u(x_1, x_2) \frac{\partial x_2}{\partial s} \\ \partial_t u(s,t) &= \partial_{x_1} u(x_1(s,t), x_2(s,t)) \frac{\partial x_1}{\partial t} + \partial_{x_2} u(x_1, x_2) \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t} \end{aligned} \right. \qquad (85)$$

Ако е в сила (84) трябва да бъде изпълнено

$$\left| \begin{aligned} \partial_s u(s,t) &= p_1(s,t) \cdot \frac{\partial x_1}{\partial s} + p_2(s,t) \cdot \frac{\partial x_2}{\partial s} \\ \partial_t u(s,t) &= p_1(s,t) \frac{\partial x_1}{\partial t} + p_2(s,t) \frac{\partial x_2}{\partial t} \end{aligned} \right. \qquad (86)$$

Тъй като матрицата

$$\begin{bmatrix} \partial_s x_1 & \partial_t x_1 \\ \partial_s x_2 & \partial_t x_2 \end{bmatrix} \quad \text{транспонираната}$$

която участва в (85) и (86) е неизродена (при достатъчно малки s), сравнявайки (85) и (86) виждаме, че (84) ще бъде в сила, ако (86) е в сила. Първото от уравненията (86) следва от системата на Лагранж-Шарпи.

$$\frac{\partial u}{\partial s}(s,t) = p_1(s,t).\partial_{p_1}F + p_2(s,t).\partial_{p_2}F =$$

$$= p_1(s,t)\frac{\partial}{\partial s}x_1(s,t) + p_2(s,t)\frac{\partial}{\partial s}x_2(s,t)$$

За да докажем второто уравнение на (86) образуваме разликата и диференцираме

$$\frac{\partial}{\partial s}\phi(s,t) \equiv \frac{\partial}{\partial s}\left[\partial_t u(s,t) - p_1.\partial_t x_1 - p_2.\partial_t x_2\right] =$$

$$= \partial_s\partial_t u - \partial_s p_1.\partial_t x_1 - p_1.\partial_s\partial_t x_1 - \partial_s p_2.\partial_t x_2 - p_2.\partial_s\partial_t x_2 =$$

$$\begin{aligned} &= \partial_t\left[p_1.\partial_{p_1}F + p_2.\partial_{p_2}F\right] + \\ &+ \left[\partial_{x_1}F + p_1.\partial_u F\right].\partial_t x_1 - p_1.\partial_t\partial_{p_1}F + \\ &+ \left[\partial_{x_2}F + p_2.\partial_u F\right].\partial_t x_2 - p_2.\partial_t\partial_{p_2}F = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \partial_t p_1.\partial_{p_1}F + p_1.\partial_t\partial_{p_1}F + \partial_t p_2.\partial_{p_2}F + p_2.\partial_t\partial_{p_2}F + \\ &+ \partial_{x_1}F.\partial_t x_1 + p_1.\partial_u F.\partial_t x_1 - p_1.\partial_t\partial_{p_1}F + \\ &+ \partial_{x_2}F.\partial_t x_2 + p_2.\partial_u F.\partial_t x_2 - p_2.\partial_t\partial_{p_2}F = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \partial_{x_1}F.\partial_t x_1 + \partial_{x_2}F.\partial_t x_2 + \partial_{p_1}F.\partial_t p_1 + \partial_{p_2}F.\partial_t p_2 + \\ &+ \partial_u F.\left[p_1.\partial_t x_1 + p_2.\partial_t x_2\right]. \end{aligned}$$

Но тъй като $F(x_1,\dots,p_2)$ е първи интеграл, за еднопараметричната фамилия характеристики (80) е изпълнено

$$F(x_1(s,t),\dots,p_2(s,t)) = 0 \qquad (87)$$

При $s=0$ $x_i(0,t) = x_i(t)$, $i=1,2$, $u(0,t)=u_0(t)$ и $p_i(0,t) = p_i(t)$ $i=1,2$, като $p_i(t)$ са такива, че да бъде изпълнено $F(x_1(t),x_2(t),u_0(t),p_1(t),p_2(t))=0$ (79). Диференцираме (87) по t

$$0 = \partial_t F = \underline{\partial_{x_1}F.\partial_t x_1 + \partial_{x_2}F.\partial_t x_2} + \partial_u F.\partial_t u + \underline{\partial_{p_1}F.\partial_t p_1 + \partial_{p_2}F.\partial_t p_2}$$

Сравняваме подчертаните изрази

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial s}\phi(s,t) = \partial_u F.[\,p_1.\partial_t x_1 + p_2.\partial_t x_2 - \partial_t u\,]$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\phi(s,t) = -\partial_u F(s,t)\,.\,\phi(s,t)$$

$$\Rightarrow \phi(s,t) = \phi(0,t)\, e^{-\int_0^s \partial_u F(\tau,t)\,d\tau}$$

Но $\phi(0,t) = 0$ защото

$$u(0,t) = u_0(t)$$
$$p_1(0,t) = \partial_{x_1} u(x_1(t), x_2(t))$$
$$p_2(0,t) = \partial_{x_2} u(x_1(t), x_2(t))$$
и $\dot{u}_0(t) = p_1(t)\dot{x}_1(t) + p_2(t)\dot{x}_2(t)$

$\phi(0,t) = \partial_t u(0,t) - p_1(0,t)\partial_t x_1(0,t) - p_2.\partial_t x_2 = \dot{u}_0(t) - p_1(t).\dot{x}_1(t) - p_2.\dot{x}_2(t) = 0$ по условието за начална ивица.

Отново сравнявайки (85) и (86) при $s=0$ (86) е вярна, защото второто уравнение сега е $\partial_t u_0(t) = p_1(t)\dot{x}_1(t) + p_2(t)\dot{x}_2(t)$, което е изпълнено по построение (79)

$\Rightarrow \phi(s,t) = 0$ и лемата е доказана

Тогава $u(x_1, x_2)$ е решение, защото за всяка точка (s,t) е изпълнено

$$u(s,t) = u(x_1(s,t), x_2(s,t))$$
$$p_i(s,t) = \partial_{x_i} u(x_1(s,t), x_2(s,t))$$

и по построение (87):

$$0 = F(x_1(s,t), x_2(s,t), u(s,t), p_1(s,t), p_2(s,t)) =$$

$$= F(x_1(s,t), x_2(s,t), u(x_1(s,t), x_2(s,t)), \partial_{x_1} u(x_1(s,t), x_2(s,t)), \partial_{x_2} u)$$

за вс. s,t. Връзката м/у (s,t) и (x_1,x_2) е взаимно еднозначна. Тогава

$$F(x_1, x_2, u(x_1,x_2), \partial_{x_1} u(x_1,x_2), \partial_{x_2} u(x_1,x_2)) = 0$$

тъждествено по (x_1, x_2) в достатъчно малка околност на γ. Решението $u(x_1,x_2)$ удовлетворява условието на Коши по построение.

$$u(x_1(0,t), x_2(0,t)) = \underline{u(x_1(t), x_2(t)) = u(0,t)} = u_0(t).$$

Ако има второ решение $V(x_1,x_2)$, което удовлетворява същото условие на Коши (77) тогава построените характеристични ивици (80) ще прилепват към $\tilde{V}$ в точките $(x_1(t), x_2(t), u_0(t))$ (при $s=0$) и съгласно една от лемите ще прилепват към $\tilde{V}$ изцяло. Тогава $\tilde{V}$ и $\tilde{u}$ ще се състоят от едно и също еднопараметрична фамилия от характеристики, следователно $\tilde{V} = \tilde{u} \Leftrightarrow V(x_1,x_2) = u(x_1,x_2)$.

u и V имат една начална ивица

Пример

Уравнение: $\partial_{x_1} u + x_1 \cdot (\partial_{x_2} u)^2 = 0$

$$F(x_1, x_2, u, p_1, p_2) = p_1 + x_1 \cdot p_2^2$$

Условие на Коши: $u(0, t) = t^2$

Система Лагранж-Шарпи.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 . p_2 \\ \dot{u} = p_1 + 2x_1 . p_2^2 \\ \dot{p}_1 = -p_2^2 \\ \dot{p}_2 = 0 \end{cases}$$

Общо решение

$$\begin{aligned} x_1 &= s + \alpha_1 \\ x_2 &= \beta_2 . s^2 + 2\beta_2 . \alpha_1 . s + \alpha_2 \\ u &= 1/2\, \beta_2^2 . s^2 + \beta_2^2 . \alpha_1 . s + \alpha_3 \\ p_1 &= -\beta_2^2 . s + \beta_1 \\ p_2 &= \beta_2 \end{aligned}$$

$\underline{p_1 + x_1 p_2^2 = 0}$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = 2\beta_2(s + \alpha_1) \Rightarrow x_2 = \beta_2 s^2 + 2\beta_2 . \alpha_1 . s + \alpha_2 \\ \dot{u} = \underbrace{p_1 + x_1 . p_2^2}_{0} + x_1 p_2^2 = (s + \alpha)\beta_2^2 \Rightarrow u = 1/2\, \beta_2^2 s^2 + \beta_2^2 \alpha_1 . s + \alpha_3 \end{cases}$$

Условие за начална ивица

$$\left.\begin{aligned} p_1 . 0 + p_2 . 1 - 2t = 0 \\ p_1 + 0 . p_2^2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} p_1(t) = 0 \\ p_2(t) = 2t \end{cases}$$

Гр. условия при $s = 0$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = t \\ \alpha_3 = t^2 \\ \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = 2t \end{cases} \Rightarrow$$

Еднопарам. фам. ивици

$$\begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = 2ts^2 + t \\ u = 2t^2 s^2 + t^2 \\ p_1 = -4t^2 s \\ p_2 = 2t \end{cases}$$

Система

$$\begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = 2ts^2 + t \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} s = x_1 \\ t = \dfrac{x_2}{1 + 2x_1^2} \end{cases}$$

Решение

$$u(x_1, x_2) = 2\left(\frac{x_2}{1+2x_1^2}\right)^2 \cdot x_1^2 + \left(\frac{x_2}{1+2x_1^2}\right)^2 = \frac{x_2^2}{1+2x_1^2}$$

Проверка на

$$p_2(s,t) = \partial_{x_2} u(x_1(s,t), x_2(s,t))$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} u = \frac{2x_2}{1+2x_1^2} \Rightarrow \partial_{x_2} u(x_1(s,t), x_2(s,t)) =$$

$$= \frac{2(2ts^2+t)}{1+2s^2} = \frac{2t\,\cancel{(1+2s^2)}}{\cancel{(1+2s^2)}} = 2t = p_2(s,t)$$

Обобщение за n-променливи

Ч.Д.У. за функция на n-променливи

$$F(x_1 \ldots x_n\ u\ \partial_{x_1} u \ldots \partial_{x_n} u) = 0 \qquad (88)$$

се определя от функция на $2n+1$-променливи $F(x_1 \ldots x_n, u, p_1 \ldots p_n)$. Всичките конструкции и свойства имат естествени многомерни обобщения. Системата на Лагранж-Шарпи е

$$\left|\begin{array}{lcl} \dot{x}_k(s) & = & \partial_{p_k} F(x_1(s), \ldots, p_n(s)) \\ \dot{u}(s) & = & p_1 . \partial_{p_1} F + \cdots + p_n . \partial_{p_n} F \\ \dot{p}_k(s) & = & -\partial_{x_k} F - p_k . \partial_u F \end{array}\right. \qquad (89)$$

$$k = 1, 2, \ldots, n$$

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) = 0$$

Теоремата на Коши гласи, че ако е зададено n-1 мерна хиперповърхност $S : (x_1(t_1, \ldots, t_{n-1}), \ldots, x_n(t_1, \ldots, t_{n-1}))$ и произволна функция $u_0(t_1, \ldots, t_{n-1})$, дефинирана върху S. В достатъчно малка околност на S съществува единствено решение $u(x_1, \ldots, x_n)$ на (88) такова, че $u|_S = u_0$, т.е.

$u(x_1(t_1,\dots,t_{k-1}),\dots,x_n(t_1\dots t_{n-1})) = u_0(t_1\dots t_{n-1})$

Доказателството за съществуване и построението на решението се извършва аналогично. Ще маркираме основните крачки

Намираме общото решение на (89)

$$\left|\begin{aligned} x_k &= x_k(s,\alpha_1,\dots,\alpha_{2n+1})\\ u &= u(s,\alpha_1,\dots,\alpha_{2n+1})\\ p_k &= p_k(s,\alpha_1,\dots,\alpha_{2n+1})\end{aligned}\right. \qquad (90)$$

Определяме $p_1(t_1,\dots,t_{n-1}),\dots,p_n(t_1,\dots,t_{n-1})$ от

$$\left|\begin{aligned} &p_1\cdot\partial_{t_1}x_1+p_2\cdot\partial_{t_1}x_2+\dots+p_n\cdot\partial_{t_1}x_n-\partial_{t_1}u_0=0\\ &\vdots\\ &p_1\cdot\partial_{t_{n-1}}x_1+p_2\cdot\partial_{t_{n-1}}x_2+\dots+p_n\cdot\partial_{t_{n-1}}x_n-\partial_{t_{n-1}}u_0=0\\ &F(x_1(t_1\dots t_{n-1}),\dots,x_n(t_1,\dots,t_{n-1}),u_0(t_1,\dots,t_{n-1}),p_1,\dots,p_n)=0\end{aligned}\right.$$

Налагаме начални условия при $s=0$

$$\begin{aligned} x_k(0,\alpha_1\dots\alpha_{2n+1}) &= x_k(t_1\dots t_{n-1})\\ u(0,\alpha_1\dots\alpha_{2n+1}) &= u_0(t_1\dots t_{n-1})\\ p_k(0,\alpha_1\dots\alpha_{2n+1}) &= p_n(t_1\dots t_{n-1})\end{aligned}$$

$k=1,2,\dots,n$

Определяме $\alpha_1=\alpha_1(t_1\dots t_{n-1}),\dots,\alpha_{2n+1}=\alpha_{2n+1}(t_1\dots t_{n-1})$ и заместваме в (90). Получаваме

$$\left|\begin{aligned} x_k &= x_k(s,t_1\dots t_{n-1}) \quad, k=1,2,\dots,n\\ u &= u(s,t_1\dots t_{n-1})\\ p_k &= p_k(s,t_1\dots t_{n-1}) \quad, k=1,2,\dots,n\end{aligned}\right.$$

От първите n уравнения определяме $s,t_1,\dots,t_{n-1}$ като функции на $x_1\dots x_n$: $s=s(x_1,\dots,x_n)$,

$t_1 = t_1(x_1 \ldots x_n), \ldots, t_{n-1} = t_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)$

Търсеното решение е

$$u(x_1 \ldots x_n) = U(s(x_1 \ldots x_n), t_1(x_1 \ldots x_n), \ldots, t_{n-1}(x_1 \ldots x_n))$$

Което отново е вярно

$$p_k(s, t_1 \ldots t_{n-1}) = \partial_{x_k} u(x_1(s, t_1 \ldots t_{n-1}), \ldots, x_n(s, t_1 \ldots t_{n-1})).$$

Еднопараметрична фамилия решения и общ интеграл.

Нека е зададено Ч.Д.У. за функция на две променливи

$$F(x_1, x_2, u, \partial_{x_1} u, \partial_{x_2} u) = 0 \qquad (91)$$

Казваме, че ни е зададена еднопараметрична фамилия решения, ако ни е зададена функция на три променливи $\varphi(x_1, x_2, a)$, такава, че за всяка фиксирана стойност на параметъра a, функцията

$$u_a(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2, a)$$

е решение на (91). Еквивалентно: $\varphi(x_1, x_2, a) - u = 0$ задава интегрална повърхност в $\mathbb{R}^3 \ni (x_1, x_2, u)$ и когато a се мени, имаме еднопараметрична фамилия от (интегрални) повърхнини. Можем да говорим за обхващата обвивка. Обвивката е графика на функция която се нарича обвивка на еднопараметричната фамилия решения. Следващата теорема показва, че ако знаем еднопараметрична фамилия решения, можем да намерим още едно, не съдържащо се в тази фамилия.

Теорема

Нека $u = \varphi(x_1, x_2, a)$ е еднопараметрична фамилия решения. Точково обвивката на тази фамилия е също решение.

Доказателство

Уравнение на обвивката се получава, като изключим параметъра a от уравненията

$$\left|\begin{array}{ll} \varphi(x_1, x_2, a) - u = 0 & \\ \partial_a \varphi(x_1, x_2, a) = 0 & \to \quad a = a(x_1, x_2) \end{array}\right. \qquad (92)$$

Трябва да покажем, че

$$u = \varphi(x_1, x_2, a(x_1, x_2)) \qquad (93)$$

е решение на (91). За тази цел сравняваме частните производни:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\varphi(x_1, x_2, a(x_1, x_2))\Big) =$$

$$= \partial_{x_1}\varphi(x_1, x_2, a(x_1, x_2)) + \underbrace{\partial_a \varphi(x_1, x_2, a(x_1, x_2))}_{=0}\, \partial_{x_1} a(x_1, x_2)$$

За всяко (x_1, x_2) е изпълнено:

$$\partial_{x_i} u(x_1, x_2) = \partial_{x_i}\varphi(x_1, x_2, a(x_1, x_2)), \; i = 1,2 \qquad (94)$$

Поради това за $u(x_1, x_2)$ определено от (93)

$$F(x_1, x_2, u(x_1, x_2), \partial_{x_1} u(x_1, x_2), \partial_2 u(x_1, x_2)) =$$
$$= F(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2, a(x)), \partial_{x_1}\varphi(x_1, x_2, a(x)), \partial_{x_2}\varphi(x_1, x_2, a(x))) = 0$$

Защото $\varphi(x_1, x_2, a)$ е решение за всяка стойност на параметъра a (При проверката, че u е решение за точката (x_1, x_2) е избрано точно $a = a(x_1, x_2)$.)

Теорема

Нека $u = \varphi(x_1, x_2, a)$ е еднопараметрична фамилия решения и нека $(x_1(s), x_2(s), u(s))$ е пресечница на две безкрайно близки интегрални повърхнини съответстващи на параметър a, т.е. определена от системата уравнения

$$\begin{cases} \varphi(x_1, x_2, a) - u = 0 \\ \partial_a \varphi(x_1, x_2, a) = 0 \end{cases} \qquad (95)$$

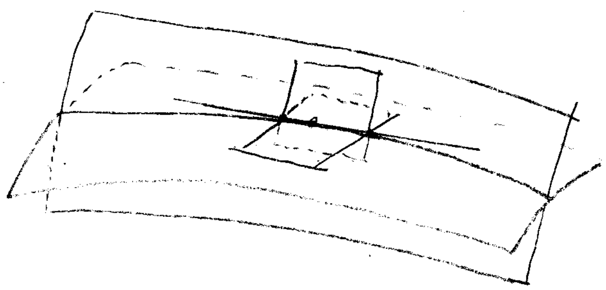
Тогава функциите $x_1(s), x_2(s), u(s)$ заедно с

$$\begin{aligned} p_1(s) &= \partial_{x_1} \varphi(x_1, x_2, a) \\ p_2(s) &= \partial_{x_2} \varphi(x_1, x_2, a) \end{aligned} \qquad (96)$$

определят характеристична крива

Доказателство (интуитивно)

Пресечницата на две повърхнини във всяка своя точка се допира до пресечната права на допирателните равнини към повърхностите в същата точка.



Безкрайно близки интегрални повърхнини имат безкрайно близки допирателни (интегрални) равнини през тази точка. Пресечницата на безкрайно близки интегрални равнини с образуващо на конуса на Монж. Тогава кривата $(x_1(s), x_2(s), u(s))$ ще има допирателен вектор $(\dot{x}_1(s), \dot{x}_2(s), \dot{u}(s))$ лежащ върху образуващо на конуса на Монж. Т.е. кривата е фокална. Уравненията (95), (96) показват, че тя е съгласувана с решението $\varphi(x_1, x_2, a)$. Но ние показахме, че фокални криви, съгласувани с решение удовлетворяват системата на Лагранж-Шарпи, т.е. те са характеристики.

<u>Коментар</u> Уравненията (95), (96) при всяка стойност на параметъра a определят характеристика и по този начин получаваме еднопараметрична фамилия характеристики. Върху 4-мерното хиперповърхност в $\mathbb{R}^5$, определена от уравнението $F(x_1, x_2, u, p_1, p_2) = 0$, съществува 3параметрична фамилия характеристики и следователно (95), (96) не определят всички характеристики.

<u>Коментар</u>: Трябва да се прави разлика между функция $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^5$, примерно $s \to (x_1(s), x_2(s), u(s), p_1(s), p_2(s))$ и крива в $\mathbb{R}^5$ като геометрично място на точки $\{(x_1(s), \dots, p_2(s)) \in \mathbb{R}^5 \mid s \in \mathbb{R}^1\}$. Системата на Лагранж-Шарпи (71) определя функция $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^5$ но във всички приложения и доказателството на теоремата на Коши ние по същество използваме кривите в $\mathbb{R}^5$.

Ако сменим параметризацията : $s = f(\tau)$ то функциите $(x_1(f(\tau)), \dots, p_2(f(\tau)))$ определят същата крива, но удовлетворяват система ОДУ с пропорционална дясна част

$$\left|\begin{aligned}
\frac{dx_i}{d\tau}(\tau) &= \frac{dx}{ds}(f(\tau))\,\frac{ds}{d\tau}(\tau) = f'(\tau)\cdot \partial_{p_1}F(x_1(\tau),\dots, p_2(\tau)) \\
\frac{du}{d\tau} &= \frac{du}{ds}\cdot\frac{ds}{d\tau} = f'(\tau)[\,p_1\partial_{p_1}F + p_2\partial_{p_2}F\,] \\
\frac{dp_i}{d\tau} &= \frac{dp_i}{ds}\cdot\frac{ds}{d\tau} = f'(\tau)[-\partial_{x_i}F - p_i\partial_u F]
\end{aligned}\right.$$

Поради това, когато се иска да се разгледат само кривите в $\mathbb{R}^5$ определени от системата (91) тя се записва като

$$\frac{dx}{\partial_{p_1}F} = \frac{dx_2}{\partial_{p_2}F} = \frac{du}{p_1\partial_{p_1}F + p_2\partial_{p_2}F} = \frac{-dp_1}{\partial_{x_1}F + p_1\partial_u F} = \frac{-dp_2}{\partial_{x_2}F + p_2\partial_u F} \qquad (97)$$

Този запис формално е несъвършен защото може да се случи например $\partial_{x_2}F + p_2\partial_u F = 0$ както беше в решения пример. Теоремата може да се формулира и така: четирите уравнения

$$\left|\begin{aligned}
u &= \varphi(x_1, x_2, a) \\
0 &= \partial_a\varphi(x_1, x_2, a) \\
p_1 &= \partial_{x_1}\varphi(x_1, x_2, a) \\
p_2 &= \partial_{x_2}\varphi(x_1, x_2, a)
\end{aligned}\right.$$

за променливите (x_1, x_2, u, p_1, p_2) определят крива в $\mathbb{R}^5$ която е решение на (97).

<u>Пълен интеграл</u> наричаме двупараметрична фамилия решения

$$u = \varphi(x_1, x_2, a, b), \qquad (98)$$

където функцията на 4 променливи $\varphi(x_1, x_2, a, b)$ зависи съществено от променливите a и b.
По точно, системата

$$\xi_1 = \partial_{x_1}\varphi(x_1, x_2, a, b)$$
$$\xi_2 = \partial_{x_2}\varphi(x_1, x_2, a, b)$$

да може да се реши спрямо a и b, т.е. да бъде изпълнено

$$\det\begin{vmatrix} \partial_{x_1}\partial_a\varphi & \partial_{x_1}\partial_b\varphi \\ \partial_{x_2}\partial_a\varphi & \partial_{x_2}\partial_b\varphi \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (99)$$

Ако познаваме пълен интеграл, (двупараметрична фамилия решения) можем да построим безкрайно параметрична фамилия от нови решения:

Нека ω е произволна гладка функция. Чрез нея, полагайки $b = \omega(a)$ получаваме еднопараметрична фамилия решения:

$$u = \varphi(x_1, x_2, a, \omega(a)). \qquad (100)$$

Нейната обвивка е едно ново решение и то е различно при различните избори на функцията ω. Т.е. получаваме нови решения, които "се параметризират" с една произволна функция. "Изобщо" всяко решение може да се получи по този начин.

4° упр.

<u>Решаване на задачата на Коши с помощта на пълен интеграл.</u>

Нека $\gamma = (x_1(t), x_2(t))$ е крива и $u_0(t)$ е функция дефинирана върху γ. Търсим решение на (51) което удовлетворява условието на Коши

$$u(x_1(t), x_2(t)) = u_0(t) \qquad (101)$$

Идеята е, единственото решение, което удовлетворява условието на Коши (101) да се представи като обвивка на еднопараметрична фамилия решения от вида (100) при подходящо избрана функция $b = \omega(a)$. Това по принцип е възможно и става по следния начин. Кривата $\tilde{\gamma} : (x_1(t), x_2(t), u_0(t))$ лежи на интегралната повърхнина $\tilde{u}$, която търсим. Ако $\tilde{u}$ е обвивка на еднопараметрична фамилия повърхнини

$$\varphi(x_1, x_2, a, \omega(a)) - u = 0,$$

във всяка своя точка кривата $\tilde{\gamma}$ (която лежи във $\tilde{u}$) да се допира до някоя интегрална повърхнина от двупараметричната фамилия $u = \varphi(x_1, x_2, a, b)$. Т.е. за всяко t съществуват a и b такива, че

$$u_0(t) = \varphi(x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, a, b)$$

(точката $(x_1(t), x_2(t), u_0(t))$ лежи на интегралната повърхност $u = \varphi(x_1, x_2, a, b)$ и

$$\partial_{x_1}\varphi(x_1(t), x_2(t), a, b)\cdot\frac{dx_1}{dt} + \partial_{x_2}\varphi(x_1(t), x_2(t), a, b)\,\frac{dx_2}{dt} - \frac{du_0}{dt} = 0$$

(в точката $(x_1(t), x_2(t), u_0(t))$ кривата $\tilde{\gamma}$ се допира до интегралната повърхност $u = \varphi(x_1, x_2, a, b)$. Векторът $(\partial_{x_1}\varphi, \partial_{x_2}\varphi, -1)$ е перпендикулярен на $(\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{u}_0(t))$). Системата от две уравнения

$$\left| \begin{array}{l} \varphi(x_1(t), x_2(t), a, b) = u_0(t) \\ \partial_{x_1}\varphi(x_1(t), x_2(t), a, b)\dot{x}_1(t) + \partial_{x_2}\varphi(x_1(t), x_2(t), a, b)\dot{x}_2(t) = \dot{u}_0(t) \end{array} \right. \qquad (102)$$

дава възможност (ако са изпълнени достатъчните условия) да се изключи t и да се определи $b = b(a)$. Това е търсената функция ω. Тогава еднопараметричната фамилия решения $u = \varphi(x_1, x_2, a, b(a))$ определя своята обвивка посредством уравненията

$$\left| \begin{array}{l} u = \varphi(x_1, x_2, a, b(a)) \\ 0 = \partial_a\varphi(x_1, x_2, a, b(a)) + \partial_b\varphi(x_1, x_2, a, b(a)) \cdot \frac{db}{da} \end{array} \right. \qquad (103)$$

функцията $u = u(x_1, x_2)$ получена от (103) чрез изключване на a: първо, е решение защото е обвивка на решение и второ: удовлетворява условието на Коши (101) по построение, a и $b(a)$ се менят за всяка точките $x_1(t)$, $x_2(t)$ с изпълнено първото уравнение на (102). Това е търсеното единствено решение. [$u(x_1(t), x_2(t)) = \varphi(x_1(t), x_2(t), a, b) = u_0(t)$]

<u>Описание на всички характеристични криви посредством пълен интеграл.</u>

Нека $u = \varphi(x_1, x_2, a, b)$ е пълен интеграл и ω произволна функция. $u = \varphi(x_1, x_2, a, \omega(a))$

еднопараметрично фамилия решения (зависещо от $\omega(a)$). Съгласно доказана теорема, пресечница на безкрайно близки повърхнини, съответствуваща на параметър a е характеристична крива и се определя от системата уравнения:

$$\begin{cases} u = \varphi(x_1, x_2, a, \omega(a)) \\ 0 = \partial_a \varphi(x_1, x_2, a, \omega(a)) + \partial_\omega \varphi(x_1, x_2, a, \omega(a)) \cdot \frac{d\omega}{da} \end{cases} \quad (104)$$

В (104) a е фиксирано, но ω е произволна функция. При фиксирано a влиянието на ω е само чрез двете функционални стойности $b = \omega(a)$ и $c = \omega'(a)$.
Когато ω пробегва всички функции, двойката числа (b, c) пробегват R^2. Поради това в (104) можем да заместим $\omega(a) = b$ и $\omega'(a) = c$ и да считаме b и c за независими параметри. При всеки избор на b и c можем да намерим функция ω такава, че $b = \omega(a)$ & $c = \omega'(a)$. Тогава твърдението за пресечниците се формулира така

<u>Теорема</u>

При всеки избор на параметрите a, b, c, системата алгебрични уравнения

$$\begin{cases} u = \varphi(x_1, x_2, a, b) \\ 0 = \partial_a \varphi(x_1, x_2, a, b) + \partial_b \varphi(x_1, x_2, a, b) \cdot c \\ p_1 = \partial_{x_1} \varphi(x_1, x_2, a, b) \\ p_2 = \partial_{x_2} \varphi(x_1, x_2, a, b) \end{cases} \quad (105)$$

определя характеристична крива.

(105) представлява частен случай на (95) и (96) когато еднопараметричната фамилия е $u = \varphi(x_1, x_2, a, \omega(a))$. Тази трипараметрична фамилия "по принцип" изчерпва всички трипараметрични фамилии характеристики определена от (71), (72).

Тук се съдържа една идея: Решавайки система алгебрични уравнения (105) ние намираме решения на система обикновени диференциални уравнения. Тази идея може да се приложи към уравненията на Хамилтон в механиката.

Метод на Хамилтон - Якоби

В теоретичната механика "Хамилтониана" $H(x,t,p)$ определя уравненията:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= \partial_{p_i} H(x_i(t), t, p_i(t)) \\ \dot{p}_i(t) &= -\partial_{x_i} H(x_i(t), t, p_i(t)) \end{aligned} \qquad (106)$$

Системата на Лагранж-Шарпи е близка "по вид" до уравненията на Хамилтон. Възникват два естествени въпроса. При зададен хамилтониан H не може ли да намерим нелинейно ЧДУ от I ред, определено от подходяща функция F, такова че системата на Лагранж-Шарпи (71) да бъде еквивалентна на уравненията на Хамилтон (106)? И ако това е така използвайки доказаната теорема, решавайки алгебрични уравнения да намерим всички решения на уравненията на Хамилтон? Отговорите са положителни.

означаваме $x_2 = t$, $p_2 = p$. Нека $H = H(x_1, t, p_1)$ е функция на Хамилтон. Тя определя съответно уравненията (106). С помощта на H определяме частното диференциално уравнение на Хамилтон-Якоби:

$$\partial_t u + H(x_1, t, \partial_{x_1} u) = 0. \qquad (107)$$

$u = u(x_1, t)$. В този случай

$$F(x_1, t, u, p_1, p) = p + H(x_1, t, p_1) \qquad (108)$$

Една очевидна особеност е, че променливата u не участва в F. Системата на Лагранж-Шарпи за уравнението на Хамилтон-Якоби (107) е

$$\begin{cases} \dot{x}_1(s) = \partial_{p_1} H(x_1(s), t(s), p_1(s)) \\ \dot{t}(s) = 1 \\ \dot{u}(s) = p_1 \partial_{p_1} H + p \\ \dot{p}_1(s) = -\partial_{x_1} H \\ \dot{p}(s) = -\partial_t H \end{cases} \qquad (109)$$

$$p + H(x_1, t, p_1) = 0.$$

От уравнението $\dot{t}(s) = 1 \Rightarrow t = s + \alpha$

Можем да изразим s чрез t и да изберем t като еволюционен параметър. Получаваме

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \partial_{p_1} H(x_1(t), t, p_1(t)) \\ \dot{p}_1(t) = -\partial_{x_1} H \\ \dot{u}(t) = p_1 \partial_{p_1} H + p \\ \dot{p}(t) = -\partial_t H \end{cases} \qquad (110)$$

Първите две уравнения са затворени

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \partial_{p_1} H(x_1(t), t, p_1(t)) \\ \dot{p}_1(t) = -\partial_{x_1} H(x_1(t), t, p_1(t)) \end{cases} \qquad (111)$$

и са системата уравнения на Хамилтон (106).

Решението на (110) определя решение и на (111). Да намерим аналога на (105). Пълният интеграл на уравнението на Хамилтон-Якоби (107) винаги има вида

$$u = \varphi(x_1, t, a) + b . \qquad (112)$$

Зависимостта от единия параметър, b, е адитивна защото u не влиза в F (108) и ако $u = \varphi(x_1, t, a)$ е еднопараметрична фамилия
което се участва подходящо
решения то $u = \varphi(x_1, t, a) + b$ е автоматично двупараметрична фамилия решения.
Системата алгебрични уравнения (105) в този случай е

$$\left| \begin{array}{l} u = \varphi(x_1, t, a) + b \\ 0 = \partial_a \varphi(x_1, t, a) + e \\ p_1 = \partial_{x_1} \varphi(x_1, t, a) \\ p = \partial_t \varphi(x_1, t, a) \end{array} \right. \qquad (112)$$

Ако от четирите уравнения за променливите x_1, t, u, p_1, p изразим $x_1 = x_1(t)$, $u = u(t)$, $p_1 = p_1(t)$, $p = p(t)$ то тези функции съгласно доказаната теорема са решение на (110) и в частност на (111). Но зависимостта $x_1 = x_1(t)$, $p_1 = p_1(t)$ може да се определи само от две уравнения.

$$\left| \begin{array}{l} 0 = \partial_a \varphi(x_1, t, a) + e \\ p_1 = \partial_{x_1} \varphi(x_1, t, a) \end{array} \right. \qquad (113)$$

Тъй като a и b са параметри системата (130) обикновено се пише (променяме $e \to -e$) като

$$\left| \begin{array}{l} e = \partial_a \varphi(x_1, t, a) \\ p_1 = \partial_{x_1} \varphi(x_1, t, a) \end{array} \right. \qquad (114)$$

В това се състои метода: от функцията на Хамилтон построяваме уравнението на Хамилтон-Якоби. Намираме пълен интеграл $u = u(x_1, t, a) + b$. Построяваме системата алгебрични уравнения (114). Определяме от нея $x_1 = x_1(t)$, $p_1 = p_1(t)$. Това е решение на уравненията на Хамилтон (106). Когато a и b се менят получаваме общото решение на (106).

Обобщение за n-променливи.

Основните конструкции и техните свойства имат естествени аналози в случая на n-променливи. Нека

$$F(x_1 \dots x_n, u, \partial_1 u, \dots, \partial_n u) = 0 \qquad (115)$$

е нелинейно ЧДУ за функция на n-променливи определено от функцията на $2n+1$ променливи $F(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n)$. Нека $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ k-параметрична фамилия решения на (115)

$$u = \varphi(x_1 \dots x_n \; a_1 \dots a_k) \qquad (116)$$

се определя от функция на $n+k$ променливи

Обвивката на k-параметрична фамилия хиперповърхности в $\mathbb{R}^{n+1}$ се определя от уравненията:

$$\left|\begin{array}{l} u = \varphi(x_1 \dots x_n, a_1, \dots, a_k) \\ 0 = \partial_{a_1}\varphi(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_k) \\ \vdots \\ 0 = \partial_{a_k}\varphi(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_k) \end{array}\right\} \quad a = a(x) \qquad (117)$$

като изключим параметрите $a = (a_1, \dots, a_k)$

Обвивката на k-параметрична фамилия

решения също е решение.
Нека $\omega(a_1 \dots a_{k-1})$ е функция на $k-1$ променливи. Полагайки $a_k = \omega(a_1, \dots, a_{k-1})$ в (116) получаваме $k-1$ параметрична фамилия решения

$$u = \varphi(x_1 \dots x_n\ a_1 \dots a_{k-1}, \omega(a_1, \dots, a_{k-1}))$$

Нейната обвивка е ново решение. То зависи от използваната функция $\omega(a_1 \dots a_{k-1})$ и по този начин получаваме безкрайно параметрична фамилия решения параметризирани с произволна функция на $k-1$ променливи. При $k < n$ това не е достатъчно за да се намери общото решение което, по силата на теоремата на Коши се параметризира с функция на $n-1$ променливи.
Пълен интеграл се нарича n-параметрично фамилия решения

$$u = u(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n) \qquad (118)$$

(подразбираме, че зависимостта от $a_1 \dots a_n$ е съществена). Нека $\omega(a_1, \dots, a_{n-1})$ е функция на $n-1$ променливи. Обвивките на $(n-1)$-параметричните фамилии

$$u = u(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_{n-1}, \omega(a_1, \dots, a_{n-1}))$$

дават общото решение зависещо от функция на $n-1$ променливи. Процедурата на решаване на задачата на Коши е следната:
Нека е пълен интеграл.
$S : (x_1(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, x_n(t_1, \dots, t_{n-1}))$ е хиперповърхност в $\mathbb{R}^n$ с размерност $n-1$ и $u_0(t_1, \dots, t_{n-1})$ е функция дефинирана върху S.
Напишете системата алгебрични уравнения (обобщение на (102)).

$$\begin{cases} \varphi(x_1(t),\dots,x_n(t),a_1,\dots,a_n) = u_0(t) \\ \partial_{x_1}\varphi(x_1(t),\dots,x_n(t),a_1,\dots,a_n)\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \dots + \partial_{x_n}\varphi(x(t),a)\frac{\partial x_n}{\partial t_1} = \partial_{t_1}u_0(t) \\ \vdots \\ \partial_{x_1}\varphi(x_1(t),\dots,x_n(t),a_1,\dots,a_n)\frac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}} + \dots + \partial_{x_n}\varphi(x(t),a)\frac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} = \partial_{n-1}u_0(t) \end{cases}$$

Тук $a = (a_1,\dots,a_n)$, $x = (x_1,\dots,x_n)$, $t = (t_1,\dots,t_{n-1})$
от тези алгебрични уравнения изключете $t_1,\dots,t_{n-1}$
и определете $a_n = a_n(a_1,\dots,a_{n-1})$
Обвивката на фамилията решения

$$u = \varphi(x_1,\dots,x_n,a_1,\dots,a_{n-1},a(a_1,\dots,a_{n-1}))$$

е решение което удовлетворява условието на Коши:

$$u(x_1(t),\dots,x_n(t)) = u_0(t)$$

Методът на Хамилтон-Якоби също има естествено обобщение за n-променливи и неговите основни стъпки изглеждат по следния начин:

Нека $H(x_1\dots x_n, t, p_1\dots,p_n)$ е функция на Хамилтон която определя уравненията

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \partial_{p_i}H(x,t,p) \\ \dot{p}_i = -\partial_{x_i}H(x,t,p) \end{cases} \qquad (119)$$

$$i = 1,2,\dots,n$$

Напишете ч.д.у на Хамилтон-Якоби

$$\partial_t u + H(x_1,\dots,x_n,t,\partial_{x_1}u,\dots,\partial_{x_n}u),$$

$u = u(x_1,\dots,x_n,t)$ и намерете неговия пълен интеграл. Той има вида:

$$u = \varphi(x_1, \dots, x_n, t, a_1, \dots, a_n) + b.$$

Функцията $\varphi(x_1, \dots, x_n, t, a_1, \dots, a_n)$ определя система алгебрични уравнения

$$\left| \begin{aligned} c_1 &= \partial_{a_1} \varphi(x_1, \dots, x_n, t, a_1, \dots, a_n) \\ &\vdots \\ c_n &= \partial_{a_n} \varphi(x_1, \dots, x_n, t, a_1, \dots, a_n) \\ p_1 &= \partial_{x_1} \varphi(x_1, \dots, x_n, t, a_1, \dots, a_n) \\ &\vdots \\ p_n &= \partial_{x_n} \varphi(x_1, \dots, x_n, t, a_1, \dots, a_n) \end{aligned} \right.$$

където $a_1 \dots a_n$, $c_1 \dots c_n$ са произволни параметри. При фиксирани a и c определяме $x_i = x_i(t)$, $p_i = p_i(t)$. Това е решение на уравненията на Хамилтон (119). Променяйки параметрите $a_1, \dots, a_n, c_1, \dots, c_n$ получаваме $2n$ параметричната фамилия на общото решение на уравненията на Хамилтон.

Линейни Частни Диференциални Уравнения от II ред (Уравнения на математическата физика).

Частните диференциални уравнения от втори ред за функция на n-променливи ($u \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$) имат вида:

$$D(x_\nu, u, \partial_\mu u, \partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2} u) = -d(x_\nu), \quad (2.1)$$

$\nu, \mu, \mu_1, \mu_2 = 1, 2, \ldots, n$, $1 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq n$, където $D(x, u, p, p_{\mu_1\mu_2})$ е (гладка) функция на $n + \binom{n+2}{2}$ променливи. (Както винаги $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$. За удобство, без ограничение на общността, дясната част е записана като произволна функция на x. Знакът "$-$" също е за удобство и няма самостоятелен смисъл. Диференциалният оператор, дефиниран в (2.1) е изображението $D: C^{\infty}(\mathbb{R}^n) \to C^{\infty}(\mathbb{R}^n): u(x) \to D[u](x) = D(x, u(x), \partial_\mu u(x), \partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2} u(x)) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Операторът D е <u>линеен</u>, ако $D[a_1 u_1 + a_2 u_2] = a_1 D[u_1] + a_2 D[u_2]$, $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ & $\forall u_1, u_2 \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Казваме, че уравнението е линейно, ако диференциалният оператор D е линеен. (Съгласно историческите традиции, терминологията за ЧДУ от I ред е малко по-различна). Най-общият вид на линейно частно диференциално уравнение от II ред е

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x) u = -d(x), \quad (2.2)$$

където $a_{ij}(x)$, $b_j(x)$, $c(x)$, $d(x)$ са гладки функции.

Въпрос: Защо това е така? Подсказка: Защото функционалните стойности на u, $\partial_j u$, $\partial_i\partial_j u$ в една точка са независими.

Терминология. Казваме, че уравнението (2.2) е: хомогенно ако $d(x) \equiv 0$ и нехомогенно ако $d(x) \not\equiv 0$, с постоянни коефициенти ако a_{ij}, b_j, c са константи и с променливи коефициенти в противния случай.

Поради равенството на смесените производни $\partial_i \partial_j u = \partial_j \partial_i u$, без ограничение на общността, можем да считаме, че матрицата a_{ij} е симетрична $a_{ij} = a_{ji}$. Ако първоначално не е така и в (2.2) имаме $a_{ij} \neq a_{ji}$, полагайки $\tilde{a}_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$ и поставяйки $\tilde{a}_{ij}$ в (2.2) получаваме същото уравнение:

$$\tilde{a}_{ij} \partial_i \partial_j u + \tilde{a}_{ji} \partial_j \partial_i u = a_{ij} \partial_i \partial_j u + a_{ji} \partial_j \partial_i u .$$

Основните уравнения срещани в теоретичната физика имат вида (2.2) и по традиция се наричат уравнения на математичната физика.

Примери

1. В електростатиката потенциалът на електростатичното поле удовлетворява уравнението

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} K(x_1, x_2, x_3) \qquad (2.3)$$

или накратко $\Delta u = -\frac{1}{\varepsilon} K$.

Тук $K(\bar{x})$ е обемната плътност на електричните товари. Най-често срещана област на решимост е $\mathbb{R}^3$ (цялата вселена!) или $V \subset \mathbb{R}^3$ - ограничена област. Хомогенното уравнение (2.3) се нарича уравнение на Лаплас, а нехомогенното на Поасон.

2. Уравнение на топлопроводността.

В термодинамиката знаем, че ако имаме неравномерно нагрято хомогенно тяло V с обемни източници на топлина в него, Температурата $u(x_1, x_2, x_3, t)$ удовлетворява уравнение от типа

$$\Delta u(\vec{x}, t) - a \frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x}, t) = -d(\vec{x}, t) \quad , \qquad (2.4)$$

където $a > 0$ е положителна константа, и естествената област на решимост е $(\vec{x}, t) \in V \times (t_0, +\infty)$ (т.е. $\vec{x} \in V$ & $t \in (t_0, +\infty)$).

3. Вълново уравнение

$$\Delta u(\vec{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\vec{x}, t) = -d(\vec{x}, t) \qquad (2.5)$$

с най-често срещана област на решимост $V \times (-\infty, +\infty)$ или $\mathbb{R}^3 \times (-\infty, +\infty)$.

Във електродинамиката знаем, че компонентите на електричното и магнитното поле удовлетворяват вълновото уравнение

4. За газодинамиката представлява интерес уравнението:

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (2.6)$$

което се нарича уравнение на Трикоми

Въпроси: Какво е общото решение? Каква допълнителна информация трябва да знаем за да определим еднозначно решението? Какви свойства имат функциите които са решения на тези уравнения?

Величините участващи в различните уравнения съответстват на качествено различни физични ситуации. Уравненията на Лаплас и Поасон описват статични процеси. От физически съображения е ясно, че за уравнението на топлопроводността ако

Ако $\alpha \equiv 0$ (няма обемни източници на топлина) и на границата на тялото няма поток на топлина, решението има проста асимптотика при $t \to \infty$: $u(\vec{x},t) \to u_0 = const$, термодинамично равновесие. Решенията $u(\vec{x},t)$ нямат продължение назад във времето до $t = -\infty$. Назад във времето означава топлината да тече от по-студеното към по-топлото при което интензивността на топлинния поток ще се увеличава и може да се случи за някоя точка $\vec{x}_0 \in V$ при $t \to t_0$, $u(\vec{x}_0,t) \to +\infty$. Каква е скоростта на температурния сигнал? Имаме ли температурни вълни и тяхно отражение? Вълновото уравнение, при $\alpha = 0$, допуска решения които са плоски вълни разпространяващи се с крайна скорост c, стоящи вълни и решенията му зададени при $t \in (t_1, +\infty)$ могат да се продължат по принцип при $t \in (-\infty, t_1)$. Качествено различните решения на приведените примери за ЧДУ се дължат на това, че имаме различни типове ЧДУ от II ред

<u>Класификация на линейните ЧДУ от II ред</u>

Разглеждаме произволна смяна на променливите

$$\left| \begin{array}{l} x_1' = x_1'(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ x_n' = x_n'(x_1,\dots,x_n) \end{array} \right. , \qquad (2.7)$$

като
$$\frac{D(x_1',\dots,x_n')}{D(x_1,\dots,x_n)} = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1'}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial x_1'}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial x_n'}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial x_n'}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (2.8)$$

Смяната (2.7) се записва накратко: $x' = x'(x)$, като $x = x(x')$ е обратната смяна.

Скаларните функции се трансформират чрез изискването: За да изчислим $u'(x')$ последователно извършваме $x' \to x(x') \to u(x(x')) = u'(x')$, т.е.

$$u'(x') = u(x(x')) \quad \text{и}$$

$$u(x) = u'(x'(x)) \tag{2.9}$$

е обратната трансформация. Понякога се пише $u'(x') = u(x)$, като мълчаливо се разбира, че едните променливи са изразени чрез другите. За да получим уравнението което удовлетворява $u'(x')$ пресмятаме производните $\partial_i u(x)$, $\partial_i \partial_j u(x)$ чрез $u'(x')$ и нейните производни и заместваме в (2.2)

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} u'(x'(x)) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial u'}{\partial x'_l}(x') \frac{\partial x'_l}{\partial x_j}(x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'_k \partial x'_l}(x') \frac{\partial x'_k}{\partial x_i}(x) \frac{\partial x'_l}{\partial x_j}(x) + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial u'}{\partial x'_l}(x') \frac{\partial^2 x'_l}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

Замествайки в (2.2) получаваме

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \left[\sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'_k \partial x'_l}(x') \frac{\partial x'_k}{\partial x_i}(x) \frac{\partial x'_l}{\partial x_j}(x) + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial u'}{\partial x'_l}(x') \frac{\partial^2 x'_l}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \left[\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial u'}{\partial x'_l}(x') \frac{\partial x'_l}{\partial x_j}(x) \right] + c(x)\, u'(x'(x)) = -d(x)$$

или

$$\sum_{k,l=1}^{n} a'_{kl}(x') \frac{\partial^2 u'}{\partial x'_k \partial x'_l}(x') + \sum_{l=1}^{n} b'_l(x') \frac{\partial u'}{\partial x'_l}(x') + c'(x')\, u'(x') = -d'(x')$$

където

$$\left|\begin{aligned} a'_{kl}(x') &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial x'_k}{\partial x_i}(x) \frac{\partial x'_l}{\partial x_j}(x)\, a_{ij}(x) \\ b'_l(x') &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x'_l}{\partial x_j}(x)\, b_j(x) + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 x'_l}{\partial x_i \partial x_j}(x)\, a_{ij}(x) \\ c'(x') &= c(x) \ ; \quad d'(x') = d(x) \end{aligned}\right. \tag{2.10}$$

Съгласно уговорката, в дясната част на (2.10) трябва да се разбира, че $x = x(x')$

Наблюдения:

1. Трансформираното решение е решение на трансформираното уравнение.

2. Матрицата от коефициентите пред старшите производни се трансформира като симетричен, контравариантен тензор. Ако положим $\alpha_{ki} = \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} \Rightarrow a'_{ke} = \alpha_{ki}\alpha_{ej}a_{ij}$ (със сумиране по повтарящи се индекси)

Задаването на (2.2) включва в себе си задаването на $a_{ij}(x)$ и по този начин на метричен тензор (метрика) в R^n. Спейното откриване (в един частен случай) е свързана специалната теория на относителността.

3. Коефициентите $b_j(x)$ не са компоненти на векторно поле.

Симетричните тензори от втори ранг (т.е. квадратичните форми) имат естествена класификация (изучавана в курса по линейна алгебра). Класификация в точка $x_0 \in R^n$.

$a_{ij}(x_0)$ е симетричен тензор (контравариантен). Съществуват координати в които, трансформирайки се съгласно (2.10) матрицата a'_{ke} е диагонална, като по диагонала стоят $+1, -1, 0$ като $\#(+1)$, $\#(-1)$ (броят на $+1$ и -1) не зависи от избора на координатите.

Ако поне един диагонален елемент е нула уравнението се нарича <u>параболично</u> (в x_0). Ако всички знаци са еднакви – <u>елиптично</u> (в x_0). Ако всички знаци са еднакви и само един е противоположен – <u>хиперболично</u> (в x_0)

Ако $\#(+1) \geq 2$ & $\#(-1) \geq 2$ – ултрахиперболично (в x_0).
Мотивировката за този избор на имена е следната. Ако $X_1, \ldots, X_n$ са променливи, уравнението

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0) X_i X_j + \sum b_j(x_0) X_j + d(x_0) = 0$$

определя хиперповърхност в $\mathbb{R}^n$ която в зависимост от класификацията е параболоид елипсоид, хиперболоид или ултрахиперболоид.
Казваме, че едно линейно ЧДУ е параболично, елиптично и т.н. в една област ако за всяка точка от тази област то е такова, съгласно направената класификация в точка

Забележки

1. Класификацията зависи само от матрицата пред старшите производни $a_{ij}(x)$ и не зависи от $b_j(x)$ $c(x)$, $d(x)$.

2. Класификацията не зависи от избора на координатите.

3. От линейната алгебра знаем следния критерий за определяне типа на една квадратична форма. Образуваме характеристичното уравнение

$$\det \begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-s & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}-s \end{vmatrix} = P(s) = 0$$

$P(s)$ е полином от степен n и има само реални корени (защото матрицата a_{ij} е симетрична).
Ако поне един корен е 0 уравнението е параболично. В останалия случай, ако всички знаци на корените са еднакви – елиптично,

ако всички знаци са еднакви и един противоположен – хиперболично и.т.н.

<u>Примери</u>

1. $\Delta u(\vec{x}) = -d(\vec{x}) \Rightarrow a_{ij}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2.11)

уравнението е елиптично

2. $\Delta u(\vec{x}, t) - a\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x}, t) = -d(\vec{x}, t) \Rightarrow a_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (2.12)

уравнението е параболично

3. $\Delta u(\vec{x}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -d \Rightarrow a_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} \end{bmatrix}$ (2.13)

уравнението е хиперболично

4. $y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow a_{ij} = \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2.14)

при: $y > 0 \to$ елиптично, $y = 0 \to$ параболично, $y < 0 \to$ хиперболично.
Това е пример на уравнение от <u>смесен тип</u>

5. $2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \Rightarrow a_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (2.15)

За характеристичното уравнение получаваме

$$\begin{vmatrix} 0-s & 1 \\ 1 & 0-s \end{vmatrix} = s^2 - 1 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = +1, -1$$

уравнението е хиперболично

действително, при смяната на променливи

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = x_1 - x_2 \end{cases}$$

то се превръща в $\frac{\partial^2 u'}{\partial x_1'} - \frac{\partial^2 u'}{\partial x_2'} = 0$

Казваме, че едно линейно ЧДУ е в <u>каноничен вид</u> ако матрицата $a_{ij}(x)$ не зависи от (x) и е диагонална (като по диагонала стоят $+1, -1, 0$)

При $n = 2$ за хиперболичното уравнение (2.15) също се казва, че е в каноничен вид

$\frac{4^{00}\ \text{чек}}{3^{00}\ \text{л.}}$

<u>Теорема на Коши</u> за <u>линейни ЧДУ</u> от <u>II</u> ред.

Предварителни конструкции

Нека $S \subset \mathbb{R}^n$ е хиперповърхност с размерност $n-1$ ($n-1$ мерно подмногообразие)

S може да се зададе параметрично

$$x_1 = x_1(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, x_n = x_n(t_1, \dots, t_{n-1})$$

или с едно "алгебрично" уравнение

$$S = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = 0 \}$$

Винаги ще считаме, че е изпълнено следното условие:

$$\operatorname{grad} F(x) \neq \vec{0}, \quad \forall x \in S \qquad (2.16)$$

Това условие отстранява патологични случаи като този: $F(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ определя точка, а не повърхност в $\mathbb{R}^3$.

Единичният нормален вектор към S в точка $x \in S$ се определя от

$$\vec{n}(x) = \operatorname{grad} F(x) \frac{1}{|\operatorname{grad} F(x)|} \qquad (2.16)$$

$\vec{n}(x)$ зависи само от хиперповърхността S

Ако $F_1(x)$, $F_2(x)$ са различни функции които чрез уравненията $F_1(x) = 0$ и $F_2(x) = 0$ определят една и съща хиперповърхност S тогава за $\forall x \in S$, $\operatorname{grad} F_1(x) = \lambda(x) \operatorname{grad} F_2(x)$ и (2.16) дава един и същ резултат.

<u>Въпрос</u>. Ако хиперповърхност е зададена параметрично, как се определя единичния нормален вектор?

Нека $u(x)$ е функция дефинирана в околност на хиперповърхността S. За точките от S е определена нормалната производна на u

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k}(x)\, n_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k}(x) \cdot \frac{\partial F}{\partial x_k}(x) \frac{1}{|\operatorname{grad} F(x)|}. \quad (2.17)$$

След тези технически уточнения можем да формулираме теоремата на Коши

Нека е дадено уравнението (2.2), хиперповърхност $S \subset \mathbb{R}^n$ и две (гладки) функции u_0, V_0 дефинирани върху S. Тогава, при известни предположения за S (които ще уточним после) в достатъчно малка околност на S съществува единствено решение на (2.2) такова, че

$$u\big|_S = u_0 \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = V_0 \quad (2.19)$$

($\frac{\partial u}{\partial n}\big|_S$ означава нормалната производна на u върху S така както е определена в (2.17)).

(Съществува качествена аналогия с ОДУ от II ред. Там решението се определя от стойността на функцията и нейната производна в една точка. Тук решението се определя от стойността на u и на нормалната производна върху една $n-1$ хиперповърхност.)

Идея за доказателство и изследване

Идеята на доказателството лежи в основата на числените методи за построяване на решението. Разглеждаме примера когато $n=3$, $F(x_1, x_2, x_3) = x_1 = 0$, $\operatorname{grad} F = (1, 0, 0)$ и S е координатната равнина $(0, x_2, x_3)$

(2.10)

Зададени са функциите $u_0(x_2, x_3) = u_0(0, x_2, x_3)$, $V_0(x_2, x_3) = V_0(0, x_2, x_3)$. Търсим решение $u(x_1, x_2, x_3)$ на

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c \cdot u = -\lambda \qquad (2.20)$$

Удовлетворяващо условията на Коши (2.18, 2.19)

$$\begin{aligned} & u(0, x_2, x_3) = u_0(x_2, x_3) \\ & \frac{\partial u}{\partial x_1}(0, x_2, x_3) = V_0(x_2, x_3) \end{aligned} \qquad (2.21)$$

Вземаме малко число ε и последователно ще намерим $u(\varepsilon, x_2, x_3)$, $u(2\varepsilon, x_2, x_3)$, $u(3\varepsilon_0, x_2, x_3)\ldots$

$$\begin{aligned} u(\varepsilon, x_2, x_3) &= u(0, x_2, x_3) + \partial_{x_1} u(0, x_2, x_3) \cdot \varepsilon = \\ &= u_0(x_2, x_3) + V_0(x_2, x_3) \cdot \varepsilon \end{aligned} \qquad (2.22)$$

защото е изпълнено (2.21). Правим следващата крачка $\varepsilon \to 2\varepsilon$

$$u(2\varepsilon, x_2, x_3) = u(\varepsilon, x_2, x_3) + \partial_{x_1} u(\varepsilon, x_2, x_3) \cdot \varepsilon .$$

$u(\varepsilon, x_2, x_3)$ е вече определено от (2.22). Трябва да сметнем $\partial_{x_1} u(\varepsilon, x_2, x_3)$.

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} u(\varepsilon, x_2, x_3) &= \partial_{x_1} u(0, x_2, x_3) + \partial_{x_1}\partial_{x_1} u(0, x_2, x_3) \cdot \varepsilon = \\ &= V_0(x_2, x_3) + \partial_{x_1}\partial_{x_1} u(0, x_2, x_3) \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

Данните на Коши, (функциите u_0 и V_0) са вече използвани и не могат да определят $\partial_{x_1}\partial_{x_1} u(0, x_2, x_3)$. Тук вече трябва да използваме, че $u(\vec{x})$ е решение на (2.20) и за точките от S е изпълнено

$$a_{11}(0, x_2, x_3)\, \partial_{x_1}\partial_{x_1} u(0, x_2, x_3) + a_{12} \cdot \partial_{x_1}\partial_{x_2} u + \cdots = -\lambda . \qquad (2.23)$$

Ако върху S е изпълнено (2.21) то в (2.23) са известни всички частни производни с изключение на $\partial_{x_1}\partial_{x_1}u$:

$\partial_1 u(0,x_2,x_3) = v_0(x_2,x_3)$, $\partial_k u(0,x_2,x_3) = \partial_k u_0(x_2,x_3)$, $k=1,2$; $\partial_1\partial_k u(0,x_2,x_3) = \partial_k v_0(x_2,x_3)$, $k=1,2$, $\partial_k\partial_l u(0,x_2,x_3) = \partial_k\partial_l u_0(x_2,x_3)$, $k,l=1,2$.

В (2.23) всички членове са определени с изключение на първото събираемо. Ако

$$a_{11}(0,x_2,x_3) \neq 0 \tag{2.24}$$

то $\partial_1\partial_1 u$ е определено. При достатъчно малко ε ще бъде изпълнено $a_{11}(\varepsilon,x_2,x_3)\neq 0$. В равнината $x_1=\varepsilon$ ние знаем данните на Коши $u(\varepsilon,x_2,x_3)$ и $\partial_1 u(\varepsilon,x_2,x_3)$ и можем да направим следващата крачка. $\varepsilon \to 2\varepsilon \to 3\varepsilon \to \cdots$. При "безкрайно много" "безкрайно малки" крачки ние получаваме търсеното решение което интуитивно е единствено. Ако $a_{11}(0,x_2,x_3)\equiv 0$ то (2.23) може да е противоречие (всички събираеми от лявата страна са определени от данните на Коши и 2.23 не е изпълнено)

Как изглежда условието (2.24) ако повърхността S е произволна? Нека тя се задава с уравнение $F(\vec{x})=0$, като $\operatorname{grad} F(\vec{x}) \neq \vec{0}$ при $x\in S$. Без ограничение на общността можем да считаме, че $\partial_{x_1}F \neq 0$. Тогава смяната на променливите

$$\begin{cases} x_1' = F(x_1,x_2,x_3) \\ x_2' = x_2 \\ x_3' = x_3 \end{cases} \tag{2.25}$$

е коректна, защото $\dfrac{D(x_1',x_2',x_3')}{D(x_1,x_2,x_3)} = \partial_{x_1}F \neq 0$

Условието $\vec{x}\in S$ в новите променливи означава $x_1'=0$ и ние попадаме в предходния пример.

Условието $a'_{11}(0, x_1', x_2') \neq 0$, предвид (2.10) означава: $\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial x_1'}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_1'}{\partial x_j} a_{ij}(x) \neq 0$, или

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(\vec{x}) \frac{\partial F}{\partial x_i}(\vec{x}) \frac{\partial F}{\partial x_j}(\vec{x}) \neq 0 \text{, при } \vec{x} \in S.$$

В общия случай, n променливи е приета следната терминология. Една хиперповърхност S, зададена с уравнение $F(x) = 0$, $\operatorname{grad} F(x) \neq 0$, $\forall x \in S$ се нарича <u>свободна</u> ако

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) \frac{\partial F}{\partial x_j}(x) \neq 0, \ \forall x \in S \qquad (2.26)$$

Същата хиперповърхност се нарича <u>характеристична</u> ако

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) \frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = 0, \ \forall x \in S \qquad (2.26)$$

Свойството една хиперповърхност да е характеристична или свободна не зависи от уравнението което я определя. Върху свободни повърхнини задачата на Коши е коректна и ние можем да формулираме теоремата на Коши така: Ако е дадена свободна повърхност S и двойка (произволни гладки) функции u_0, v_0 дефинирани върху S, в достатъчно малка околност на S <u>съществува единствено</u> решение $u(x)$ на (2.2) удовлетворяващо условията на Коши (2.18, 2.19).

<u>Коментар</u>.

Нека S е хиперповърхност която разделя областта на решимост на две части: от лицевата и от опаката страна. Ако две решения u_1, u_2 изпадат от страна на опаката под S

и върху самата S те ще имат върху S еднакви стойности и еднакви нормални производни, т.е. ще удовлетворяват едни и същи условия на Коши (2.18, 2.19) върху свободна повърхност S. Тогава съгласно теоремата на Коши те ще съвпадат достатъчно близко до S и в посока на лицевата част. Т.е. върху S те не могат да се разделят. Но ние имаме примерно решения които се разделят. Примерно разглеждаме вълновото уравнение (удовлетворявано от компонентите на електромагнитното поле) в обема на стая и в интервал $[t_0, t_1]$. Едното решение е тишина (нулевото), лампата е изключена (поради ремонт на тока) в целия интервал (t_0, t_1). Ако осветлението бъде включено в момент $t \in (t_0, t_1)$ ние имаме ново решение което в една област на пространство-времето съвпада с първото, нулевото, решение и после се разделя от него. Хиперповърхността която разделя областта на съвпадение и областта на различие може да бъде само характеристична. В противен случай теоремата на Коши би забранила разделянето. Същият пример може да се даде с уравнението на топлопроводността и произволното включване на загряване. Така характеристичните повърхнини представляват фронтовете по които две решения, които са съвпадали могат да почнат да се различават или все едно фронтовете по които се разпространяват сигналите. Видът на характеристичните повърхности определя свойствата на решенията. Характеристичните повърхнини се определят от уравнението (2.26) в което участва само матрицата пред старшите производни a_{ij} (Поради това направената класификация на линейните Ч.Д.У. от II ред е обществена).

Привеждане на линейно Ч.Д.У. от II ред в каноничен вид

Ако е дадено линейно Ч.Д.У. (2.2) възниква естествения въпрос: Не може ли с подходяща смяна на променливите да го приведем в каноничен вид, когато $a_{ij}(x)$ са константи и матрицата $a_{ij}(x)$ е максимално проста? Тогава бихме го изучавали по-лесно. За произволно уравнение това е възможно само при $n=2$ и е свързано с намирането на характеристичните повърхнини, които в този случай са криви. Избираме по-удобните за случая означения $(x,y)=(x_1,x_2)$. Общия вид на линейно Ч.Д.У. от II ред за функция на две променливи е

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+P(x,y,u,\partial_x u,\partial_y u)=0. \tag{2.27}$$

с $P(\dots)$ са означени всички останали членове. От линейната алгебра знаем, че при

$b^2-ac>0$ уравнението е хиперболично,

$b^2-ac=0$ ——— ——— параболично,

$b^2-ac<0$ ——— ——— елиптично.

Нека $\xi=\xi(x,y)$

$\eta=\eta(x,y)$

е смяна на променливите.

В новите променливи (2.27) има вида:

$$a'(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u'}{\partial \xi^2} + 2b'(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u'}{\partial \xi \partial \eta} + c(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u'}{\partial \eta^2} + P'(\xi,\eta,u',\partial_\xi u,\partial_\eta u) = 0, \qquad (2.28)$$

където, съгласно (2.10) имаме

$$a'(\xi,\eta) = a(x,y)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2$$

$$b'(\xi,\eta) = a(x,y)\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + b\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + c\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} \qquad (2.29)$$

$$c'(\xi,\eta) = a(x,y)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2$$

1. Нека уравнението е хиперболично: $b^2(x,y) - a(x,y).c(x,y) > 0$. Търсим $\xi(x,y)$ и $\eta(x,y)$ такива, че $a' = 0 = c'$. Тогава (2.28) ще има вида $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + P''(\dots) = 0$

което също е каноничен вид. Т.е. ξ и η трябва да бъдат такива, че да бъде изпълнено

$$a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = 0$$

$$a\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 = 0 \qquad (2.30)$$

Трябва да се намерят две първични решения на едно, също уравнение.

Уравнението за ξ и η е едно и също. То е условие ξ и η да бъдат първи интеграли на подходящи обикновени диференциални уравнения. Ако ξ е първи интеграл, алгебричното уравнение $\xi(x,y) = const$ определя като неявна функция $y = y(x)$. Нейната производна се определя от:

$$\xi(x, y(x)) = \text{const} \Rightarrow \frac{d}{dx}\xi(x, y(x)) = 0$$

$$\Rightarrow \partial_x \xi + \partial_y \xi \cdot \dot{y}(x) = 0 \Rightarrow \dot{y}(x) = -\frac{\partial_x \xi}{\partial_y \xi}.$$

Ако в (2.30) разделим на $(\partial_y \xi)^2$ получаваме

$$a\left(\frac{\partial_x \xi}{\partial_y \xi}\right)^2 + 2b\frac{\partial_x \xi}{\partial_y \xi} + c = 0,$$

$$a(\dot{y}(x))^2 - 2b\,\dot{y}(x) + c = 0. \qquad (2.31)$$

Това квадратно уравнение има два корена

$$\dot{y}_1(x) = \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a} \qquad (2.32)$$

$$\dot{y}_2(x) = \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a} \qquad (2.33)$$

Това са две различни обикновени диференциални уравнения, решени спрямо производната. Те притежават първи интеграли. Нека $\xi(x, y)$ е първи интеграл на (2.32) и $\eta(x, y)$ е първи интеграл на (2.33). Тогава

$$\dot{y}_1(x) = -\frac{\partial_x \xi}{\partial_y \eta} \quad \& \quad \dot{y}_2(x) = -\frac{\partial_x \eta}{\partial_y \eta} \qquad (2.34)$$

Двойката

$$\xi = \xi(x, y)$$

$$\eta = \eta(x, y)$$

задава смяна на променливите. Ако допуснем, че

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \partial_x \xi & \partial_y \xi \\ \partial_x \eta & \partial_y \eta \end{vmatrix} = \partial_x \xi\, \partial_y \eta - \partial_x \eta\, \partial_y \xi = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial_x \xi}{\partial_y \xi} = \frac{\partial_x \eta}{\partial_y \eta} \quad \Rightarrow \quad \dot{y}_1(x) = \dot{y}_2(x) \,,$$

което е противоречие. В хиперболичния случай $b^2 - ac > 0$ и корените са различни. Ако $y_1(x)$ е решение на (2.32) $\rightarrow$ $y_1(x)$ е решение на (2.31) и $\xi(x,y)$ удовлетворява (2.3). Същото важи и за $y_1(x)$ и $\eta(x,y)$. Тогава $a'(\xi,\eta) = c'(\xi,\eta) = 0$ и в променливи (ξ,η) уравнението (2.28) има вида

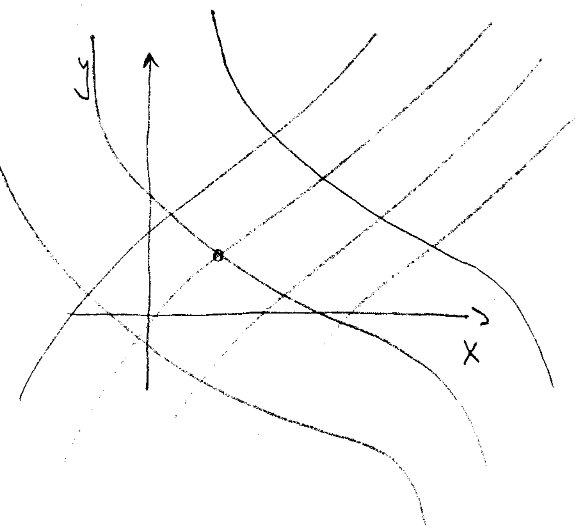
$$2\, b'(\xi,\eta)\, \frac{\partial^2 u'}{\partial\xi\,\partial\eta} + P'(\xi,\eta,u',\partial_\xi u',\partial_\eta u') = 0 \qquad (2.35)$$

като $b'(\xi,\eta) \neq 0$ защото условието за хиперболичност сега е $(b')^2 - a'c' = (b')^2 > 0$. След деление на b' получаваме каноничен вид:

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial\xi\,\partial\eta} + P''(\xi,\eta,u',\partial_\xi u',\partial_\eta u') = 0 \qquad (2.36)$$

<u>Геометрична интерпретация</u>.

Алгебричното уравнение $\xi(x,y) = const$ определя криви в $\mathbb{R}^2$ които са интегрални за (2.32). Уравнението (2.30) показва че те са аналог на характеристичните повърхнини в случая на n-променливи (2.26). Възприето е те отново да се наричат "характеристики" (Вместо характеристични хипер повърхнини при брой на променливите $n = 2$). През всяка точка минават две характеристики зададени от $y_1(x)$ и $y_2(x)$ както е показано на рисунката. Те образуват координатна мрежа и при смяната на променливите



те се превръщат в ξ и η - координатни линии.

Уравнението (2.36) много често се решава директно, поради което описаната процедура се нарича "Метод на характеристиките.

2. Параболичен случай.

Нека $b^2(x,y) - a(x,y)\,c(x,y) = 0$, като $a^2+b^2+c^2 \neq 0$ (за да бъде уравнението от II ред).
Уравнението (2.31) има един (двоен) корен

$$\dot{y}(x) = \frac{b}{a} \qquad (2.37)$$

Избираме $\omega(x,y)$ да е първи интеграл на (2.37). Тогава $\operatorname{grad}\omega \neq 0$.
Избираме $\varphi(x,y)$ да е такава, че

$\xi = \omega(x,y)$
$\eta = \varphi(x,y)$

да е смяна на променливите. Локално това е винаги възможно. (По начало всички разглеждания са локални). В тези променливи $a'(\xi,\eta) = 0$ защото ω е първи интеграл на (2.37) и $\dot{y}(x)$ удовлетворява (2.31).
Както и да избираме φ винаги ще имаме $b'(\xi,\eta) = 0$. Защото критерият за параболичност е в сила и за новите променливи $(b')^2 = a'\cdot c' = 0$. Тогава уравнението (2.28) има вида

$$c'(\xi,\eta)\,\frac{\partial^2 u'}{\partial \eta^2} + P'(\xi,\eta, u', \partial_\xi u', \partial_\eta u') = 0 \qquad (2.37)$$

$C'(\xi,\eta) \neq 0$. Защото в противен случай уравнението просто няма да е от II ред. След деление на C' получаваме

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial \eta^2} + P''(\xi, \eta, u', \partial_\xi u', \partial_\eta u') = 0 \quad , \qquad (2.38)$$

каноничния вид на параболично уравнение.

3. Елиптичен случай

Нека $b^2 - ac < 0$. В този случай уравнението (2.31) няма реални корени. Избираме един комплексен корен

$$\dot{y}_1(x) = \frac{b + i\sqrt{ac - b^2}}{a} \quad . \qquad (2.39)$$

Разглеждаме (2.39) като О.Д.У. за комплексно значна функция с комплексен аргумент. Предполагаме също че функциите a, b, c са аналитични и имат аналитично продължение за комплексни x и y. Нека $\omega(x,y)$ е комплексно значен първи интеграл. Когато $y = y(x)$ е решение $\omega(x, y(x)) = const$. След като намерим ω, разглеждаме x, y реални и означаваме $\omega(x,y) = \omega_1(x,y) + i\,\omega_2(x,y)$.

Тогава

$$\begin{aligned} \xi &= \omega_1(x,y) \\ \eta &= \omega_2(x,y) \end{aligned} \qquad (2.40)$$

е коректна смяна на променливите.

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \partial_x \omega_1 & \partial_y \omega_1 \\ \partial_x \omega_2 & \partial_y \omega_2 \end{vmatrix} = \partial_x \omega_1 \partial_y \omega_2 - \partial_x \omega_2 \partial_y \omega_1 \quad . \qquad (2.41)$$

За комплекснозначно решение $y = y(x)$ на (2.39) е в сила: (разглеждаме реални x)

$$\partial_x w(x, y(x)) + \partial_y w(x, y(x)) \cdot \dot{y}(x) = 0 .$$

Заместваме $w = w_1 + i w_2$ и $\dot{y}(x)$ от (2.39)

$$\partial_x w_1 + i \partial_x w_2 + (\partial_y w_1 + i \partial_y w_2) \frac{b + i\sqrt{ac - b^2}}{a} = 0$$

Отделяме реалната и имагинерната част:

$$\left| \begin{aligned} &\partial_x w_1 + \frac{b}{a} \partial_y w_1 - \partial_y w_2 \cdot \frac{\sqrt{ac - b^2}}{a} = 0 \\ &\partial_x w_2 + \frac{b}{a} \partial_y w_2 + \partial_y w_1 \frac{\sqrt{ac - b^2}}{a} = 0 \end{aligned} \right.$$

Определяме $\partial_x w_1$, $\partial_x w_2$ и заместваме ~~в (2.44)~~

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = -\frac{1}{a}(b \partial_y w_1 - \sqrt{ac - b^2} \partial_y w_2) \partial_y w_2 +$$

$$+ \frac{1}{a}(b \partial_y w_2 + \sqrt{ac - b^2} \partial_y w_1) \cdot \partial_y w_1 =$$

$$= -\frac{b}{a} \cancel{\partial_y w_1 \partial_y w_2} + \frac{\sqrt{ac - b^2}}{a} (\partial_y w_2)^2 +$$

$$+ \frac{b}{a} \cancel{\partial_y w_2 \partial_x w_1} + \frac{\sqrt{ac - b^2}}{a} (\partial_y w_1)^2$$

$$= \frac{\sqrt{ac - b^2}}{a} \left[(\partial_y w_1)^2 + (\partial_y w_2)^2 \right]$$

Ако сме избрали $y(x)$ да е комплексно решение, такова, че при $x = x_0$, $y(x_0) = y_0$ - реално, то

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} (x_0, y_0) = \frac{\sqrt{ac - b^2}}{a} \left[(\partial_y w_1(x_0, y_0))^2 + (\partial_y w_2(x_0, y_0))^2 \right] \neq 0$$

за вс. (x_0, y_0). От това, че w е първи интеграл следва, че w удовлетворява

$$a(\partial_x w)^2 + 2b \partial_x w \partial_y w + c(\partial_y w)^2 = 0$$

$$\Rightarrow a(\partial_x w_1 + i\,\partial_x w_2)^2 + 2b(\partial_x w_1 + i\,\partial_x w_2)(\partial_y w_1 + i\,\partial_y w_2) + c(\partial_y w_1 + i\,\partial_y w_2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow a\big((\partial_x w_1)^2 - (\partial_x w_2)^2 + i.2\,\partial_x w_1\,\partial_x w_2\big) + 2b\big(\partial_x w_1\,\partial_y w_1 - \partial_x w_2\,\partial_y w_2 + i\,\partial_x w_2\,\partial_y w_1 + i\,\partial_x w_1\,\partial_y w_2\big) + c\big((\partial_y w_1)^2 - (\partial_y w_2)^2 + i.2\,\partial_y w_1\,\partial_y w_2\big) = 0$$

Сравняваме реалните и имагинерните части
от реалната част получаваме:

$$a(\partial_x w_1)^2 + 2b\,\partial_x w_1\,\partial_y w_1 + c(\partial_y w_1)^2 = a(\partial_x w_2) + 2b\,\partial_x w_2\,\partial_y w_2 + c(\partial_y w_2)^2$$

Т.е. $a'(\xi,\eta) = c'(\xi,\eta)$
от имагинерната част получаваме

$$2\left[a.\partial_x w_1\,\partial_x w_2 + b(\partial_x w_1\,\partial_y w_2 + \partial_y w_1\,\partial_x w_2) + c\,\partial_y w_1\,\partial_y w_2\right] = 0$$

Т.е. $b'(\xi,\eta) = 0$. При тази смяна на променливите уравнението (2.28) има вида

$$a'(\xi,\eta)\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial \eta^2}\right) + P'(\xi,\eta,u',\partial_\xi u',\partial_\eta u') = 0 \qquad (2.41)$$

като $a'(\xi,\eta) \neq 0$. След деление на a' получаваме каноничния вид.

<u>Коментар</u> Вече споменахме, че симетричната матрица $a_{ij}(x)$ е метричен тензор. Задачата за привеждане в каноничен вид може да се формулира така: да се направи смяна на координатите, така че в новите координати $a'_{kl}(x')$ да бъде с константни метрични елементи. В случая $n=2$ показахме, че в променливи ξ, η

матрицата $a'_{ke}(\xi,\eta)$ има вида

$$f(\xi,\eta)\cdot\begin{bmatrix}\pm 1,0 & 0\\ 0 & \pm 1\end{bmatrix} \qquad (2.42)$$

като $f(\xi,\eta)\neq 0$ (уравнения 2.35, 2.37, 2.41)

За случая на $n\geq 3$ отговорът е даден от Риман. Метричният тензор a_{ij} определя кривината на пространството. Тя се характеризира с тензора на Риман (тензор на кривината, определен от $a_{ij}(x)$).

Ако тензорът на Риман съответствуващ на матрицата $a_{ij}(x)$ в (2.2) е нула, тогава локално уравнението (2.2) може да се преведе в каноничен вид. В противен случай това е невъзможно. Двумерните риманови пространства са конформно плоски, което означава че за всеки метричен тензор локално съществуват координати в които метричния тензор има вида (2.42).

<u>Пример</u>

Уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$a=1$
$b=0$
$c=-x^2$
$b^2-ac=x^2>0$

$(\dot y(x))^2 - x^2 = 0 \Rightarrow \dot y_1(x) = x$
$\dot y_2(x) = -x$

$x\neq 0$

Общи решения	Първи интеграли
$y_1 = \frac{1}{2}x^2+\alpha$	$\xi = \frac{1}{2}x^2 - y$
$y_2 = -\frac{1}{2}x^2+\beta$	$\eta = \frac{1}{2}x^2+y$

Смяната, привеждаща уравнението в каноничен вид е:

$$\xi = \frac{1}{2}x^2 - y$$
$$\eta = \frac{1}{2}x^2 + y$$

Обобщени функции

Мотивировка.

В електростатиката потенциалът на точков товар с големина e и радиус вектор $\vec{x}'$: $u(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{|\vec{x}+\vec{x}'|}$ и обобщаво за непрекъснати товари с обемна плътност $\kappa(\vec{x})$; $u(\vec{x}) = = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\kappa(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'$. При това виждаме, потенциала на точковия товар и принципа на суперпозицията са съществени. Непрекъснатите товари се разглеждат като граничен случай на "безкрайно много" "безкрайно малки" точкови товари. При полевия подход се установява, че потенциалът удовлетворява уравнение на Поасон

$$\Delta u(\vec{x}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\kappa(\vec{x}) \qquad (3.1)$$

Принципът на суперпозиция се реализира в това, че уравнението на Поасон е линейно. Потенциалното поле $u(\vec{x})$ се определя не чрез интеграл, а като решение на ЧДУ. При това ролята на точковия товар, (точковия източник) се запазва. Ако знаем решението на (3.1) в частния случай, съответстващ на точков товар, по принцип можем да намерим произволно друго решение като граничен преход на "безкрайно много" "безкрайно малки" точкови товари. Но каква е обемната плътност на точков товар? Ако имаме хомогенно натоварено кълбо с общо количество товари 1, радиус ε и център в $\vec{0}$, обемната плътност е

$$K_{\varepsilon}(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} & |\vec{x}| \leq \varepsilon \\ 0 & |x| > \varepsilon \end{cases} \qquad (3.2)$$

при $\varepsilon \to 0$, когато в границата получаваме точков товар:

$$K_{\varepsilon}(\vec{x}) \to \begin{cases} +\infty & |\vec{x}| = 0 \\ 0 & |\vec{x}| \neq 0 \end{cases}$$

Границата не е коректно определена функция. Поради това е полезно да се разгледа по-широк клас функции, "обобщени функции". Където освен обикновените функции се съдържат и нови, "обобщени" функции сред които е и границата $\lim_{\varepsilon \to 0} K_{\varepsilon}(\vec{x})$. Въвеждането на обобщените функции има принципна аналогия с разширението на рационалните числа Q до реалните числа $\mathbb{R}$ и въвеждането на ирационалните числа, примерно $\sqrt{2}$. Още от древна Гърция се знае, че $\sqrt{2}$ не може да се представи като $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$, n, m цели числа. С помощта на рационалните числа Q се въвежда нова конструкция "сечение на Дедекинд" на Q. Всяко число $q \in Q$ определя сечение на Дедекинд и различните рационални числа определят различни сечения. Но има и сечения които не се определят от рационално число. Те са новите, ирационални, числа и $\sqrt{2}$ е едно от тях. Действията с новите, реални, числа се определят в термини на сечения на Дедекинд по такъв начин, че за рационалните числа да съвпадат с известните. Тази принципна схема се следва при въвеждане на обобщените функции.

Нека $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ е множеството на всички комплекснозначни гладки функции на n реални променливи. (Възможно е да се започне и с реалнозначни функции но с оглед на бъдещи приложения това не е удобно)

Носител на функция $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ се нарича множеството

$$\operatorname{supp}(\varphi) = \overline{\{(x) \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) \neq 0\}} .$$

Чертата означава затваряне, т.е. прибавяне на граничните точки. Например $\operatorname{supp}(\sin(x)) = (-\infty, +\infty)$. Точките $k\pi$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ се прибавят защото са гранични

Компактно множество $K \subset \mathbb{R}^n$. По дефиниция K се нарича компактно ако е ограничено и затворено. Важна теорема (на Борел и Лебег) гласи че $K \subset \mathbb{R}^n$ е компактно тогава и само тогава когато от всяко отворено покритие може да се избере крайно подпокритие. (Последното свойство се приема за дефиниция на компактно множество в случай на произволно топологично пространство).

Множество на пробните функции $\mathcal{D} \subset C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$

По дефиниция $\mathcal{D}$ е множеството на всички функции от $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ които са с компактен носител. Елементите на $\mathcal{D}$ се наричат "пробни функции" или в някои книги "тест функции" от английското "test functions". $\mathcal{D}$ е безкрайномерно векторно пространство; $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D} \Rightarrow a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 \in \mathcal{D}$ (трябва да се осъзнае, че $a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2$ има компактен носител). $\mathcal{D}$ е затворено спрямо произволно диференциране: $\varphi \in \mathcal{D} \Rightarrow \partial_{\mu_1} \ldots \partial_{\mu_n} \varphi \in \mathcal{D}$.

В $\mathcal{D}$ има достатъчно много функции. Например, при $n = 1$, функцията дефинирана посредством

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{(x-a)^2-\varepsilon^2}} & , x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \\ 0 & , x \leq a-\varepsilon, \ x \geq a+\varepsilon \end{cases} \tag{3.3}$$

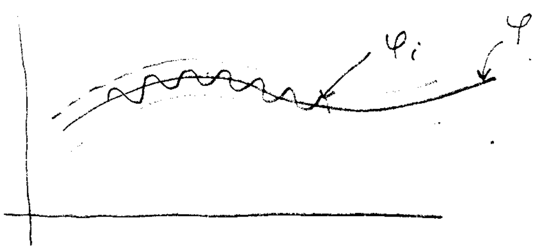
е безкрайно пъти диференцируема и $supp(\varphi) = [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ (тук $\varepsilon > 0$). Интуитивно е ясно, че за всяка точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и околност $U \ni x_0$, съществува реално значна функция $\varphi \in \mathcal{D}$ такава, че $supp(\varphi) \subset U$ & $\varphi(x) \geq 0$ като $\varphi(x_0) > 0$.

Сходимост на редица от функции в $\mathcal{D}$

По дефиниция, една редица от функции $\varphi_i \in \mathcal{D}$ клони към $\varphi \in \mathcal{D}$ ако

1. Съществува кълбо $B_R = \{(x) \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq R\}$ такова, че $supp(\varphi_i) \subset B_R$, $\forall i = 1, 2, \dots$
   т.е. носителите на φ_i не се "разбягват".
2. За всяка частна производна
   $\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_r} \varphi_i(x) \to \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_r} \varphi$, $i \to \infty$ равномерно

Коментар Трябва да се осъзнае, че в 2. има безброй много независими изисквания. "всяка частна производна" означава в частност и нулевата, т.е. $\varphi_i \to \varphi$ равномерно. Нека $\varepsilon > 0$ е положително число и при $i > \nu$ $|\varphi_i(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$. Но чертежа това означава че графиката на $\varphi_i(x)$ е в тясната полоса около графика на φ. Но колкото и малко да е ε



това не води до изискване за близост на първите производни. Аналогично ако $|\varphi_i'(x) - \varphi'(x)| < \varepsilon$ това не води до близост на вторите производни и т.н.

Това силно изискване води до хубавите свойства на обобщените функции.

<u>Функционал</u>. Функционал се нарича всяко изображение $u : D \to \mathbb{C}$. Тук пробните функции се явяват точки от дефиниционната област на u

<u>Линеен функционал</u>. Това е функционал $u : D \to \mathbb{C}$ за който е изпълнено $u(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1 u(\varphi_1) + a_2 u(\varphi_2)$, $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ & $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in D$

<u>Линеен непрекъснат функционал</u>. наричаме линеен функционал за който е изпълнено следното: Всеки път когато $\lim\limits_{i\to\infty} \varphi_i = \varphi$ (в D) е в сила $\lim\limits_{i\to\infty} u(\varphi_i) = u(\varphi)$.

Необходимостта от тази дефиниция идва от това, че за разлика от крайномерния случай, сега съществуват линейни функционали които не са непрекъснати.

<u>Твърдение</u> (привеждаме го без доказателство) Ако u_i, $i=1,2,..$ са линейни непрекъснати функционали, u е функционал, такъв, че $\lim\limits_{i\to\infty} u_i = u$ поточково, т.е. за вс. пробна функция $\varphi \in D$ редицата от числа $u_i(\varphi)$ е сходяща и $\lim\limits_{i\to\infty} u_i(\varphi) = u(\varphi)$, Тогава u също е линеен непрекъснат функционал.

<u>Обобщена функция</u> (тип D) наричаме всеки линеен непрекъснат функционал $u : D \to \mathbb{C}$

Множеството на всички обобщени функции се означава с D'

<u>Обикновените функции като обобщени</u>

Нека $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. На f съпоставяме линеен функционал по правилото $f \to u_f \in \mathcal{D}'$

$$u_f(\varphi) \equiv \langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1 \ldots x_n)\, \varphi(x_1 \ldots x_n)\, d^n x \quad . \qquad (3.2)$$

Интегралът винаги съществува, защото φ е е компактен носител и всяка непрекъсната функция f в компактно множество ограничена. Линейният функционал (3.2) е непрекъснат поради дефиницията за сходимост в $\mathcal{D}$.

По този начин имаме влагане $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \to \mathcal{D}'$: $f \to \langle f, \cdot \rangle \in \mathcal{D}'$. Обобщената функция $\langle f, \cdot \rangle$, дефинирана в (3.2) напълно определя f. Т.е. ако $f_1 \neq f_2 \Rightarrow \langle f_1, \cdot \rangle \neq \langle f_2, \cdot \rangle$ като линейни непрекъснати функционали. Нека $x_0 \in \mathbb{R}^n$ е такова, че $f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$. Без ограничение на общността можем да считаме, че f_1 и f_2 са реалнозначни и $f_1(x_0) - f_2(x_0) > 0$. Тогава съществува околност $U \ni x_0$ такава, че $f_1(x) - f_2(x) > 0 \quad \forall x \in U$. Избираме реалнозначна пробна функция φ такава че $\varphi(x) \geq 0$, $\operatorname{supp}(\varphi) \subset U$, $\varphi(x_0) > 0$. Тогава $\langle f_1, \varphi \rangle - \langle f_2, \varphi \rangle =$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f_1(x)\varphi(x)\, d^n x - \int_{\mathbb{R}^n} f_2(x)\varphi(x)\, d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} (f_1 - f_2)(x)\, \varphi(x)\, d^n(x) =$$

$$= \int_U (f_1 - f_2)(x)\, \varphi(x)\, dx > 0 .$$

Което означава, че функционалите $\langle f_1, \cdot \rangle$ и $\langle f_2, \cdot \rangle$ са различни.

Интуитивно, пробните функции са толкова много че в (3.2) "опипват" много фино гладката функция f и могат да уловят всяко различие на гладките функции f_1 и f_2

<u>Регулярни обобщени функции</u> се наричат всички обобщени функции получени чрез (3.2) където $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Всяка локално интегрируема функция $h(x)$ също определя обобщена функция посредством

$$\langle h, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} h(x)\varphi(x)\, d^n x \qquad (3.4)$$

Пример функцията

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \qquad (3.5)$$

е локално интегрируема и определя обобщена функция

$$\langle \theta, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\varphi(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} 1.\ \varphi(x)\,dx \qquad (3.6)$$

За обобщената функция (3.6) няма никакво значение каква стойност ще приемем при $x = 0$ в (3.5). Лесно се съобразява, че ако две локално интегрируеми функции се различават върху множество с мярка нула обобщените функции които те определят посредством (3.4) съвпадат. Има обобщени функции непредставими нито като (3.2) нито като (3.4).
Да разгледаме отново плътностите $K_\varepsilon(\vec{x})$, (3.2) те са интегрируеми (прекъснати) функции и определят обобщени функции $\langle K_\varepsilon, \varphi \rangle$
Като редица от обобщени функции те имат граница в $\mathcal{D}$

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\mathbb{R}^3} K_\varepsilon(\vec{x})\varphi(x)\, d^3x = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3\right)^{-1} \int_{|x| \leq \varepsilon} \varphi(x)\, d^3x =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3\right)^{-1} \cdot \left(\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3\right) \cdot \varphi(\tilde{x}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varphi(\tilde{x}) = \varphi(\vec{0})$$

Тук използвахме теоремата за средните стойности. $|\tilde{x}| < \varepsilon$ е подходяща точка в областта на интегриране. Съгласно приведеното по-рано твърдение границата на обобщени функции е обобщена функция.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \langle K_\varepsilon, \varphi \rangle = \varphi(0) \equiv \langle \delta(\vec{x}), \varphi(x) \rangle .$$

Т.е. обемната плътност на точков товар поставен в $\vec{x} = 0$ е обобщената функция δ дефинирана посредством

$$\langle \delta(\vec{x}), \varphi(\vec{x}) \rangle = \varphi(\vec{0}) \qquad (3.7)$$

Очевидно (3.7) определя линеен непрекъснат функционал (обобщена функция). Той е непредставим във вида (3.4). Въпреки това, прието е във физическата литература той да се записва като $\int_{R^3} \delta(\vec{x}) \varphi(\vec{x})\, d^3x$. Този запис трябва да се схваща като мнемонично правило за точната дефиниция (3.7).

<u>Носител на обобщена функция</u> $u \in \mathcal{D}'$

$\mathrm{supp}(u) \subset R^n$ е затворено множество дефинирано посредством условието

$x \notin \mathrm{supp}(u) \iff \exists$ околност $V \ni x$ такава, че за $\forall \varphi \in \mathcal{D}$: $\mathrm{supp}(\varphi) \subset V \Rightarrow \langle u, \varphi \rangle = 0$

(Т.е. когато носителят на пробната функция е извън носителят на u, $\langle u, \varphi \rangle = 0$)

Пример $\mathrm{supp}\,\delta(\vec{x}) = \{\vec{0}\}$, $\mathrm{supp}(\theta(x)) = [0, +\infty)$

<u>Сингулярен носител на обобщена функция</u> $u \in \mathcal{D}'$

$\mathrm{sing.supp}(u) \subset R^n$ е затворено множество дефинирано с условието: $x \notin \mathrm{sing.supp}(u) \iff \exists$ околност $V \ni x$ и гладка функция $f \in C^\infty(R^n, \mathbb{C})$ такива че винаги когато $\mathrm{supp}(\varphi) \subset V$ да бъде изпълнено $\langle u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$.

(Т.е. извън $\mathrm{sing.supp}(u)$, u съвпада с някоя гладка функция).

Примери: $\operatorname{sing.supp}(\theta(x)) = \{0\}$, $\operatorname{sing.supp}(\delta(\vec{x})) = \{\vec{0}\}$.

Операции с обобщени функции

Умножение с гладка функция.

Нека $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, За регулярна обобщена функция $\langle f, \rangle$ имаме

$$\langle gf, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f(x) \varphi(x)\, d^n x = \int f(x) . (g(x)\varphi(x))\, d^n(x) =$$

$$= \langle f, g.\varphi \rangle$$

. Тук $g.\varphi \in \mathcal{D}$ когато $\varphi \in \mathcal{D}$, защо?

За произволна обобщена функция $u \in \mathcal{D}'$ се постулира

$$\langle g u, \varphi \rangle = \langle u, g.\varphi \rangle \qquad (3.8)$$

Пример $\langle g(\vec{x})\, \delta(\vec{x}), \varphi(\vec{x}) \rangle = g(\vec{0}).\varphi(\vec{0})$.

Забележка. Умножението на обобщени функции сами със себе си е по принцип невъзможно.

Диференциране на обобщени функции

За гладка функция $f(x_1, \dots, x_n)$, $\partial_1 f(x_1 \dots x_n)$ е също гладка функция. Те определят регулярни обобщени функции. Каква е връзката между функционалите $\langle f, \cdot \rangle$ и $\langle \partial_1 f, \cdot \rangle$?

$$\langle \partial_1 f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1} f(x_1 \dots x_n)\, \varphi(x_1 \dots x_n)\, d^n x =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_{x_1} f(x_1 \dots x_n)\, \varphi(x_1 \dots x_n)\, dx_1 \right] dx_2 \dots dx_n =$$

интегрираме по части в скобите

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big[\underbrace{f(x_1 \dots x_n)\varphi(x_1 \dots x_n) \Big|_{x_1=-\infty}^{x_1=+\infty}}_{=0\text{, защо?}} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1 \dots x_n)\, \partial_{x_1} \varphi(x_1 \dots x_n)\, dx_1 \Big]\, d^{n-1}x$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1 \dots x_n)\, \partial_{x_1} \varphi(x_1 \dots x_n)\, d^n x = -\langle f, \partial_{x_1} \varphi \rangle$$

т.е. $\partial_{x_1} f$ определя линейния функционал $\varphi \to -\langle f, \partial_{x_1}\varphi \rangle$. Той е непрекъснат, защото ако $\varphi_i \to \varphi$, $i \to \infty$ в $\mathcal{D}$, то $\partial_{x_1}\varphi_i \to \partial_{x_1}\varphi$ поради равномерното клонене. Тук се вижда защо такава "силна" дефиниция за граница на редица от пробни функции е приета.

Обобщавайки, за произволна обобщена функция частните производни се дефинират посредством:

$$\langle \partial_{\mu_1}\dots\partial_{\mu_k} u, \varphi \rangle = (-1)^k \langle u, \partial_{\mu_1}\dots\partial_{\mu_k} \varphi \rangle . \qquad (3.9)$$

<u>Забележка</u>. Всички обобщени функции, включително и тези със сингулярен носител са безкрайно пъти диференцируеми.

Прилагайки комбинирано горните дефиниции получаваме действие на линейни диференциални оператори върху обобщени функции.

$$\langle D(u), \varphi \rangle = \left\langle \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + c.u \, , \, \varphi \right\rangle =$$

$$= \left\langle u, (-1)^2 \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (a_{ij}.\varphi) + (-1)^1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} (b.\varphi) + c.\varphi \right\rangle =$$

$$= \langle u, \tilde{D}(\varphi) \rangle$$

$\tilde{D}(\varphi)$ се нарича формално спрегнат линеен диференциален оператор

<u>Примери</u>:

1. $\langle \theta', \varphi \rangle = -\langle \theta, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)\,dx = -\varphi(x)\Big|_0^\infty = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle \Rightarrow \underline{\theta'(x) = \delta(x)}$

2. $\ln|x|$ е локално интегруема. Тя определя обобщена функция.

3. $\frac{1}{x}$ не е локално интегрируема и не определя обобщена функция. С $\frac{1}{x}$, посредством допълнителни уточнения са свързани няколко обобщени функции

$P\left(\frac{1}{x}\right)$ наричана "главна стойност" се дефинира посредством условието $(n=1)$

$$\left\langle P\left(\tfrac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \right]. \quad (3.10)$$

Коректност на дефиницията.

а). за всяко $\varepsilon > 0$, дясната страна на (3.10) е обобщена функция

б). границата съществува (поточкове граница на линейни непрекъснати функционали). Нека $\varphi \in \mathcal{D}$ е произволна, фиксирана. Съществува положително число R, такова, че $\operatorname{supp}(\varphi) \in [-R, R]$. φ винаги може да се представи като

$\varphi(x) = \varphi(0) + x \cdot \varphi_1(x)$

$$\begin{cases} \varphi(x) = \int_0^x \varphi'(\xi)\, d\xi + \varphi(0) = \varphi(0) + x\int_0^1 \varphi'(x.t)\, dt & (\xi = x.t) \\ \varphi_1(x) = \int_0^1 \varphi'(x.t)\, dt \end{cases}$$

Тогава

$$\left\langle P\left(\tfrac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(0) + x.\varphi_1(x)}{x}\, dx + \int_{+\varepsilon}^{R} \frac{\varphi(0) + x.\varphi_1(x)}{x}\, dx \right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\cancel{\varphi(0) \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\, dx} + \int_{-R}^{-\varepsilon} \varphi_1(x)\, dx + \cancel{\varphi(0) \int_{+\varepsilon}^{+R} \frac{1}{x}\, dx} + \int_{+\varepsilon}^{+R} \varphi_1(x)\, dx \right]$$

$$= \int_{-R}^{+R} \varphi_1(x)\, dx. \quad (3.11)$$

(Границата на обобщени функции е обобщена функция) с $\frac{1}{x}$ е свързана и друга обобщена функция посредством дефиницията

$$\left\langle \frac{1}{x \pm i0}, \varphi \right\rangle = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon}\, dx \qquad (3.12)$$

Коректност на дефиницията

$\varphi \in \mathcal{D}$, R: $\operatorname{supp}\varphi \in [-R, R]$, φ има представяне $\varphi(x) = \varphi(0) + x.\varphi_1(x)$. Пресмятаме

$$\left\langle \frac{1}{x+i0}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-R}^{R} \frac{\varphi(0) + x.\varphi_1(x)}{x + i\varepsilon}\, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\varphi(0) \int_{-R}^{R} \underbrace{\frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}}_{\text{нечетна}}\, dx + \int_{-R}^{R} \frac{x}{x + i\varepsilon} \varphi_1(x)\, dx \right] =$$

Във втория интеграл можем да направим граничния преход под знака на интеграла

$$= -i\varphi(0) \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-R}^{R} \frac{\varepsilon\, dx}{x^2 + \varepsilon^2} + \int_{-R}^{R} \varphi_1(x)\, dx =$$

$$= -i\varphi(0) \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-R}^{R} \frac{d\frac{x}{\varepsilon}}{1 + \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2} + \int_{-R}^{R} \varphi_1(x)\, dx =$$

$$= -i\varphi(0) \lim_{\varepsilon \to 0} 2\operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon}\Big|_0^R + \int_{-R}^{R} \varphi_1(x)\, dx =$$

$$= -i\varphi(0) \lim_{\varepsilon \to 0} 2\operatorname{arctg} \frac{R}{\varepsilon_0} + \int_{-R}^{R} \varphi_1(x)\, dx = -i\pi\varphi(0) + \int_{-R}^{R} \varphi_1(x)\, dx$$

сравнявайки с 3.11 получаваме

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{x+i0} &= P\left(\frac{1}{x}\right) - i\pi\delta(x) \\ \frac{1}{x-i0} &= P\left(\frac{1}{x}\right) + i\pi\delta(x) \end{aligned}\right\} \text{ формули на Сохоцки} \qquad (3.12)$$

Обобщени функции с носител в една точка

Нека $u \in \mathcal{D}'$ е обобщена функция и нека $\operatorname{supp}(u) = \{0\}$ (Разглеждаме n-променливи). Интуитивно е ясно, че $\langle u, \varphi \rangle$ може да зависи само от всевъзможните частни производни на φ: $\partial_{\mu_1} \ldots \partial_{\mu_r} \varphi(0)$ в точката (0). Тъй като u е линеен функционал, той трябва да има вида

$$\langle u, \varphi \rangle = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{1 \le \mu_1 \le \ldots \le \mu_r \le n} a_{\mu_1 \ldots \mu_r} \, \partial_{\mu_1} \ldots \partial_{\mu_r} \varphi(0). \qquad (3.13)$$

Тази сума трябва да е крайна. Ако не е крайна, дефиницията на u в (3.13) няма да е коректна. Стойностите на частните производни в една точка са независими. Винаги можем да намерим функция, чиито частни производни в една точка приемат отнапред зададени стойности. Ако сумата в (3.13) не е крайна за някои φ този ред е разходящ. Например избираме φ да бъде такава, че когато $a_{\mu_1 \ldots \mu_r} \neq 0$, да бъде изпълнено $\partial_{\mu_1} \ldots \partial_{\mu_r} \varphi(0) = (a_{\mu_1 \ldots \mu_r})^{-1}$. Тогава сумата (3.13) се състои от безброй много единици. Интуитивно ни доказахме следната

Теорема: Всяка обобщена функция с носител в (0) е крайна линейна комбинация на $\delta(x)$ и нейни частни производни

Забележка (и история) В този факт е зародишът на редица от математически следствия които накрая обясняват периодичната система на атомите!

Смяна на променливите

Нека

$$\begin{cases} w_1 = w_1(x_1 \dots x_n) \\ \vdots \\ w_n = w_n(x_1 \dots x_n) \end{cases}$$

или по накратко $w = w(x)$ е смяна на променливите. Тогава очевидно

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(w(x))\, \varphi(x)\, d^n x = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(w)\, \varphi(x(w)) \left|\frac{D(x)}{D(w)}\right| d^n w$$

Съгласно общия принцип за дефиниране на операции с обобщени функции постулираме за произволна обобщена функция

$$\langle u \circ w(x), \varphi(x)\rangle = \left\langle u(w), \varphi(x(w)) \left|\frac{D(x)}{D(w)}\right|(w)\right\rangle \qquad (3.14)$$

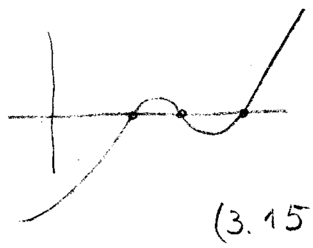
Приложения

Ако f е гладка смяна на променливите в $\mathbb{R}$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(f(x))\, \varphi(x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(w)\, \varphi(f^{-1}(w)) \left|\frac{d f^{-1}}{dw}(w)\right| dw =$$

$$= \varphi(f^{-1}(0)) \cdot \left|\frac{d f^{-1}}{dw}(0)\right| = \varphi(x_0)\, \frac{1}{|f'(x_0)|} \qquad \text{където } f(x_0) = 0$$

Обобщение. Ако f има краен брой нули $x_1, \dots, x_k$ и $f'(x_i) \neq 0$, $i = 1, 2, \dots k$. Т.е. графиката е както на картинка, чрез смяна на променливите в околност на всеки корен получаваме



$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(f(x))\, \varphi(x)\, dx = \sum_{i=1}^{k} \varphi(x_i)\, \frac{1}{|f'(x_i)|} \qquad (3.15)$$

Пример $\delta(2x) = \frac{1}{2}\delta(x)$

Често приложение намират следните формули които няма да изведеме тука.

$$\int_{\mathbb{R}^3} \delta(x_1)\,\varphi(x_1,x_2,x_3)\,d^3x = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(0,x_2,x_3)\,dx_2\,dx_3 \qquad (3.16)$$

и нейното обобщение

$$\int_{\mathbb{R}^3} \delta(F(x_1,x_2,x_3))\,\varphi(x_1,x_2,x_3)\,d^3x = \iint_S \varphi(x)\,\frac{1}{|\operatorname{grad} F(x)|}\,|d\vec{S}| \qquad (3.17)$$

където S е повърхността определена от уравнението $F(x) = 0$.

$$\int_{\mathbb{R}^3} \delta(x_1)\,\delta(x_2)\,\varphi(x_1,x_2,x_3)\,d^3x = \int_{\mathbb{R}} \varphi(0,0,x_3)\,dx_3 \qquad (3.18)$$

и нейното обобщение

$$\int_{\mathbb{R}^3} \delta(f(x))\,\delta(g(x))\,\varphi(x)\,d^3x = \int_L \varphi(x)\,\frac{1}{|\operatorname{grad} f \times \operatorname{grad} g|}\,|d\vec{x}| \qquad (3.19)$$

където L е кривата определена от уравненията

$$f(x_1,x_2,x_3) = 0$$
$$g(x_1,x_2,x_3) = 0$$

Бавнорастящи обобщени функции и преобразувание на Фурие.

Преобразуването на Фурие, което играе голяма роля в изучаването на диференциалните оператори прави полезно разглеждането на един нов клас функции означаван традиционно с S.
Множеството S се състои от гладки функции $S \subset C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, които "на безкрайност заедно с всичките си производни бързо намаляват". По точно $\varphi \in S$ тогава и само тогава, когато за всеки набор индекси $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$, и всяко число $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$ е изпълнено

$$\lim_{|x| \to \infty} (1+|x|)^m \, |\partial_{\mu_1} \ldots \partial_{\mu_r} \varphi(x)| = 0 . \qquad (3.20)$$

Т.е. φ и всичките ѝ производни клонят към 0 когато $|x| \to +\infty$ по-бързо от коя да е положителна степен на $\frac{1}{1+|x|}$. Без да променяме изискването в знаменателя се пише $1+|x|$ за да не се изключва точката $(x)=(0)$.
Очевидно следните две дефиниции са еквивалентни на (3.20): За всеки набор индекси $\alpha_1 \ldots \alpha_m ; \mu_1, \ldots, \mu_r$

$$|x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \ldots x_{\alpha_m} \partial_{\mu_1} \ldots \partial_{\mu_r} \varphi(x)| \text{ е ограничена} \qquad (3.21)$$

функция в $\mathbb{R}^n$

$$|\partial_{\mu_1} \ldots \partial_{\mu_r} (x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \ldots x_{\alpha_m} \varphi(x))| \text{ е ограничена} \qquad (3.22)$$

функция в $\mathbb{R}^n$

Свойства на S

1. $\mathcal{D} \subset S$. Това е очевидно. Ако $supp(\varphi)$ е компактно множество, при големи $|x|$ $\varphi(x) = 0$ и условията при $|x| \to \infty$ са тривиално изпълнени.
2. S е безкрайномерно векторно пространство.
$\forall a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ & $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in S \Rightarrow a_1 . \varphi_1 + a_2 . \varphi_2 \in S$
Това също е очевидно. Ако φ_1 и φ_2 заедно със всичките си производни клонят към 0 при $|x| \to \infty$ по бързо от вс. степен на $\frac{1}{1+|x|}$ то това е изпълнено и за линейните комбинации от тях.
3. S е затворено спрямо диференцирания и умножение на полиноми. Ако $\varphi \in S$, очевидно $x_{\alpha_1} . x_{\alpha_2} \ldots x_{\alpha_m} \partial_{\mu_1} \ldots \partial_{\mu_r} \varphi \in S$ за $\forall \alpha_1 \ldots \alpha_m$, $\forall \mu_1 \ldots \mu_r$

4. Ако $\varphi \in S \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi| \, d^n x$ винаги съществува.

Доказателство. Нека $\varphi \in S$. Тогава
$|(1+|x|)^{n+1} . \varphi(x)| \leq K_1$ (от 3.21) и

$$|\varphi(x)| = \frac{(1+|x|)^{n+1}}{(1+|x|)^{n+1}} |\varphi(x)| \leq K_1 \frac{1}{(1+|x|)^{n+1}}$$

Но $\frac{K_1}{(1+|x|)^{n+1}}$ е положителна интегруема функция в $\mathbb{R}^n$ която мажорира $|\varphi(x)| \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \, d^n x$ съществува.

Пример: $P(x) e^{-x^2} \in S$ където $P(x)$ е ограничена функция или полином или функция удовлетворяваща оценката
$|P(x)| \leq C(1+|x|)^m$, $C > 0$, $m > 0$.

Сходимост на редица от функции в S.

Нека $\varphi_i \in S$, $i = 1, 2, \dots$, $\varphi \in S$. Казваме, че редицата φ_i клони към φ в S, $\varphi_i \to \varphi$, $i \to \infty$ ако за всеки набор индекси $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, $\mu_1, \dots, \mu_n$

$$x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_m} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \varphi_i(x) \to x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_m} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \varphi(x) \qquad (3.23)$$

равномерно в $\mathbb{R}^n$.

$\varphi_\varepsilon \to \varphi$ в D $\Rightarrow$ $\varphi_\varepsilon \to \varphi$ в S

Множителят $x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_m}$ има значение когато искаме равномерна сходимост в $\mathbb{R}^n$. Например редицата $\frac{1}{n} \to 0$, $n \to \infty$ (равномерно по x — тривиално) но $x \frac{1}{n} \to x . 0 = 0$ не клони равномерно по x. Това е едно много силно условие за сходимост. То осигурява хубавите свойства на новия тип обобщени функции.

Бавно растящи обобщени функции (или обобщени функции тип S) се наричат линейните непрекъснати функционали $u : S \to \mathbb{C}$.

Регулярни бавно растящи обобщени функции

нека $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ на нея се съпоставя линеен непрекъснат функционал $u_f \in S'$ — множеството на бавно растящите обобщени функции:

$$u_f(\varphi) = \langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) \, d^n(x) \,. \qquad (3.24)$$

Сега въпросът за сходимостта на (3.24) е съществен. Ако $|f(x)| \to \infty$ при $|x| \to \infty$ много бързо (3.24) може да е разходящ. Ако f е такава, че съществуват константи $c > 0$, $m > 0$, такива, че $|f(x)| \le C(1 + |x|)^m$ то f определя бавно растяща обобщена функция. Примерно $(x^2 + x^{1948}) . \sin x$ е бавно растяща об.ф а e^{x^2} не е.

Операциите с обобщени функции тип S са напълно аналогични на тези с обобщените функции тип D. Като обща забележка: силното условие за сходимост на редица от функции в S дава възможност винаги когато е необходимо да диференцираме и правим граничен преход под знака на интеграла.

Съществува естествено влагане $S' \subset D'$ (т.е. обобщените функции тип S са едновременно и обобщени функции тип D)

Ако $u \in S' \Rightarrow u : S \to \mathbb{C}$ е линеен непрекъснат функционал. Но $D \subset S$. Тогава $u : D \to \mathbb{C}$ е линеен функционал. Той ще е непрекъснат ако всеки път когато $\varphi_i \to \varphi$ в D следва, че $\varphi_i \to \varphi$ в S. Лесно се съобразява, че това е така. Функциите φ_i имат носители в кълбо B_R. Но в B_R всеки множител $x_{j_1} \dots x_{j_m}$ в (3.23) е ограничен и престава да бъде допълнително условие. Остава само равномерната сходимост на частните производни в B_R.

Преобразувание на Фурие

Означаваме $x = (x_1, \dots, x_n)$, $p = (p_1, \dots, p_n)$

$$p . x = x . p = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$$

Нека $\varphi(x) \in S^{(n)}$ (n-променливи). На нея съпоставяме нова функция посредством интеграла

$$\tilde{\varphi}(p) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i p . x} \varphi(x) \, d^n x \qquad (3.25)$$

Терминология

Съответствието $\varphi(x) \to \tilde{\varphi}(p) \equiv \mathcal{F}[\varphi](p)$ се нарича преобразувание на Фурие. $\tilde{\varphi}$ се нарича Фурие образ на φ. Когато $\varphi(x) \in S$ интегралът (3.25) е сходящ за всяко p ($|e^{ip.x}| = 1$) и $\tilde{\varphi}(p)$ е добре дефинирана. За разлика от диференциалните оператори преобразуването на Фурие не е локално. За да определим примерно $\tilde{\varphi}(0)$:

$$\tilde{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} 1.\, \varphi(x)\, d^n(x)$$

ние използваме "цялата" функция $\varphi(x)$

<u>Лема</u> Ако $\varphi \in S^{(n)}$, тогава $\tilde{\varphi}(p) = \mathcal{F}[\varphi](p)$ е гладка функция.

<u>Доказателство</u>: В (3.25) $\tilde{\varphi}(p)$ се определя посредством интеграл в който подинтегралната функция зависи от p като параметър и е безкрайно пъти диференцируема по p. $\varphi(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$ "бързо", $|e^{ip.x}| = 1$ е ограничена и можем да диференцираме под знака на интеграла

$$\partial_{p_\mu} \tilde{\varphi}(p) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)} \left(i x_\mu . \varphi(x) \right) d^n(x) . \quad (3.26)$$

Т.е. $\tilde{\varphi}(p)$ притежава първи частни производни. Но $i x_\mu \varphi(x) \in S^{(n)}$ и можем да диференцираме още веднъж под знака на интеграла и така неограничен брой пъти защото за всеки набор индекси $x_{\mu_1} x_{\mu_2} \dots x_{\mu_r} \varphi(x) \in S^{(n)}$.

Теорема   Ако $\varphi(x) \in S^{(n)}$, тогава

$$\mathcal{F}[x_{\mu_1} \dots x_{\mu_r} \varphi](p) = \frac{\partial_{p_{\mu_1}}}{i} \frac{\partial_{p_{\mu_2}}}{i} \dots \frac{\partial_{p_{\mu_r}}}{i} \mathcal{F}[\varphi](p). \quad (3.27)$$

(3.27) се получава, като се приложи (3.26) няколко пъти.

Преобразуването на Фурие превръща умножението по променлива в диференциране по тази променлива (с точност до множител i^{-1})

Теорема

Ако $\varphi(x) \in S^{(n)}$, тогава

$$\mathcal{F}[\partial_{x_{\mu_1}} \partial_{x_{\mu_2}} \dots \partial_{x_{\mu_r}} \varphi](p) = \frac{p_{\mu_1}}{i} \dots \frac{p_{\mu_r}}{i} \mathcal{F}[\varphi](p). \quad (3.28)$$

Доказателство. Изчисляваме последователно

$$\mathcal{F}[\partial_{x_1} \varphi](p) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)} \partial_{x_1} \varphi(x) \, d^n(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i p_1 x_1} \partial_{x_1} \varphi(x_1 \dots x_n) \, dx_1 \right] e^{i(p_2 x_2 + \dots + p_n x_n)} dx_2 \dots dx_n =$$

Интегрираме по части

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big[\underbrace{e^{i p_1 x_1} \varphi(x_1 \dots x_n) \Big|_{x_1 = -\infty}^{x_1 = +\infty}}_{0 \text{ защото } \varphi \in S} - i p_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i p_1 x_1} \varphi(x_1 \dots x_n) \, dx_1 \Big] e^{i(p_2 x_2 + \dots + p_n x_n)} dx_2 \dots dx_n$$

$$= -i p_1 \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)} \varphi(x_1 \dots x_n) \, dx_1 \dots dx_n = \frac{p_1}{i} \mathcal{F}[\varphi](p).$$

Повтаряме необходимия брой тази операция и получаваме (3.28).

Преобразуването на Фурие превръща диференцирането по променлива в умножение по тази променлива (с точност до множител i^{-1}).

Теорема

Ако $\varphi(x) \in S^{(n)}$, тогава $\tilde{\varphi}(p) = \mathcal{F}[\varphi](p) \in S^{(n)}$

Доказателство

Избираме произволен набор индекси $\mu_1 \dots \mu_r$, $\alpha_1 \dots \alpha_m$ и разглеждаме

$$|\partial_{p_{\mu_1}} \dots \partial_{p_{\mu_r}} (p_{\alpha_1} \dots p_{\alpha_m} \mathcal{F}[\varphi](p))| =$$

$$= |\partial_{p_{\mu_1}} \dots \partial_{p_{\mu_r}} \mathcal{F}[i^m \partial_{x_{\alpha_1}} \dots \partial_{x_{\alpha_m}} \varphi](p)| =$$

$$= |\mathcal{F}[i^{m+r} x_{\mu_1} \dots x_{\mu_r} (\partial_{x_{\alpha_1}} \dots \partial_{x_{\alpha_m}} \varphi)](p)| =$$

$$= \left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{ip.x} (i^{m+r} x_{\mu_1} \dots x_{\mu_r} (\partial_{x_{\alpha_1}} \dots \partial_{x_{\alpha_m}} \varphi(x))) d^n x \right| \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{ip.x} (i^{m+r} x_{\mu_1} \dots x_{\mu_r} (\partial_{x_{\alpha_1}} \dots \partial_{x_{\alpha_m}} \varphi(x)))| d^n x =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} | x_{\mu_1} \dots x_{\mu_r} (\partial_{x_{\alpha_1}} \dots \partial_{x_{\alpha_m}} \varphi(x))| d^n x = const$$

(независи от p) По една от еквивалентните дефиниции (3.21) $\mathcal{F}[\varphi](p) \in S^{(n)}$.

Теорема Фурие преобразуването $\mathcal{F} : S^{(n)} \to S^{(n)}$ е непрекъснато линейно изображение.

Доказателство

$\mathcal{F}$ е очевидно линейно изображение и е достатъчно да се провери неговата непрекъснатост в нулата $0 \in S^{(n)}$. Трябва да покажем, че ако $\varphi_i(x) \to 0$ в $S^{(n)}$ то и $\mathcal{F}[\varphi_i](p) \to 0$ в $S^{(n)}$

Разглеждаме

$$|p_{\alpha_1} \dots p_{\alpha_m} (\partial_{p_{\mu_1}} \dots \partial_{p_{\mu_r}} \mathcal{F}[\varphi_i](p))| =$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{ip.x} \, i^{m+r} \, \partial_{x_{\alpha_1}} \dots \partial_{x_{\alpha_m}} (x_{\mu_1} \dots x_{\mu_r} \varphi_i(x)) \, d^n x \right| \leq$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} | \partial_{x_{\alpha_1}} \dots \partial_{x_{\alpha_m}} (x_{\mu_1} \dots x_{\mu_r} \varphi_i(x))| \, d^4 x \quad \to 0, \ i \to \infty$$

защото $\varphi_i \to 0$, $i \to \infty$ в S. Последният израз не зависи от p което означава че сходимостта е равномерна по p.

Коментар. Тук приехме за очевидно, че ако $\varphi_i \to 0$ в S то $\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_i(x)| \, d^4 x \to 0$, $i \to +\infty$. но за тези за които изпитват необходимост ще приведем доказателството. Нека $\varphi_i(x) \to 0$ в S тогава, съгласно дефиницията

$(1+|x|)^{n+1} . \varphi_i(x) \to 0$ равномерно в $\mathbb{R}^n$. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно положително число. при $i > V$

$$|(1+|x|)^{n+1} \varphi_i(x)| \leq \varepsilon \qquad \forall x.$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_i(x)| \, d^4 x = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{(1+|x|)^{n+1}}{(1+|x|)^{n+1}} \varphi_i(x) \right| d^4 x \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varepsilon}{(1+|x|)^{n+1}} \, d^4 x = \varepsilon . K$$

. където K е константа независеща от ε. т.е. $\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_i(x)| d^4 x$ от известно място нататък става по-малко от произволно положително число.

Теорема (основна, приведена се без доказателство) Преобразуването на Фурие $\mathcal{F} : S^{(n)} \to S^{(n)}$ е линейно, непрекъснато (в $S^{(n)}$) и взаимно-еднозначно. Обратното преобразувание се определя от

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ip.x} \tilde{\varphi}(p)\, d^n p \equiv \mathcal{F}^{-1}[\tilde{\varphi}](x). \quad (3.29)$$

<u>Коментар</u> Обратното преобразуване е също линейно и непрекъснато. То е еднотипно със самото преобразуване на Фурие. Действително сравняването на (3.25) и (3.29) показва, че

$$\mathcal{F}^{-1}[\psi(p)] = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}[\psi(-p)] \quad (3.30)$$

Действително $\frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}[\psi(-p)](x) =$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ipx} \psi(-p)\, d^n p = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ipx} \psi(p)\, d^n p =$$

$\mathcal{F}^{-1}[\psi(p)](x)$.

след смяна на променливите $p \to -p$.

Поради тази връзка между $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{-1}$ за $\mathcal{F}^{-1}$ е в сила

$$\mathcal{F}^{-1}[p_{\alpha_1} \dots p_{\alpha_m} \psi](x) = i\partial_{x_{\alpha_1}} \dots i\partial_{x_{\alpha_m}} \mathcal{F}^{-1}[\psi](x), \quad (3.31)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\partial_{p_{\mu_1}} \dots \partial_{p_{\mu_r}} \psi](x) = ix_{\mu_1} \dots ix_{\mu_r} \mathcal{F}^{-1}[\psi](x). \quad (3.32)$$

<u>Фурие преобразуване на бавно растящи обобщени функции</u>

Нека $f \in S \to \tilde{f} = \mathcal{F}[f] \in S$. Те определят регулярни бавно растящи функции $\langle f, \cdot \rangle$ и $\langle \tilde{f}, \cdot \rangle$. Как се изразява в термини на обобщени функции преобразуването на Фурие и връзката $\tilde{f} = \mathcal{F}[f]$? Да пресметнем

$$\langle \tilde{f}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(p)\, \varphi(p)\, d^n p =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \Big[\int_{\mathbb{R}^n} e^{ip.x} f(x)\, d^n x \Big] \varphi(p)\, d^n p =$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^n \mathbb{R}^n} e^{ipx} f(x)\, \varphi(p)\, d^n x\, d^n p = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) . \tilde{\varphi}(x)\, d^n x =$$

$= \langle f, \tilde{\varphi} \rangle$. Т.е. за регулярни функции от S^n
$\langle \tilde{f}, \varphi \rangle = \langle f, \tilde{\varphi} \rangle$. Това се приема и за

<u>дефиниция.</u> Преобразованието на Фурие за бавнорастящи функции: $\mathcal{F} : S' \to S'$ се дефинира посредством

$$\langle \mathcal{F}[u], \varphi \rangle = \langle u, \mathcal{F}[\varphi] \rangle, \qquad (3.33)$$

$u \in S'$, $\varphi \in S$.

<u>Коментар</u>

1. Дефиницията е коректна защото $\mathcal{F} : S \to S$ е непрекъснато и ако u е линеен непрекъснат функционал, $\langle u, \mathcal{F}[\varphi] \rangle$ е също линеен непрекъснат функционал.
2. Дефиницията (3.33) не може да се приложи за обобщени функции тип D защото ако $\varphi \in D$ то $\mathcal{F}[\varphi]$ няма компактен носител.
3. Ако $f \notin S$ но определя бавно растяща обобщена функция, за нейния фурие образ продължаваме да пишем израза (2.25). Примерно $f(x) = x^2$

$$\mathcal{F}[x^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx} x^2\, dx$$ въпреки че интегралът е разходящ и няма смисъл. Точният смисъл се придава от (3.33).

Примери

1. Колко е $\mathcal{F}[\delta]$?

$$\langle \mathcal{F}[\delta], \varphi \rangle = \langle \delta, \mathcal{F}[\varphi] \rangle =$$

$$= \langle \delta(p), \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx} \varphi(x)\,dx \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i0x} \varphi(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} 1 . \varphi(x)\,dx = \langle 1, \varphi \rangle , \forall \varphi \in S^{(1)}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\mathcal{F}[\delta] = 1}$$

формално $\mathcal{F}[\delta] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx} \delta(x)\,dx = e^{ip.0} = \underline{1}$

но e^{ipx} не е пробна функция !.

За $\mathcal{F}^{-1}$ получаваме : $\underline{\mathcal{F}^{-1}[1] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} .1. dp = \delta(x)}$

вземайки (3.30) получаваме също

$\underline{\mathcal{F}[1](p) = 2\pi\,\delta(p)}$. Прилагайки (3.27) получаваме примерно

$\underline{\mathcal{F}[x^2] = -(2\pi)\,\delta''(p)}$, което формално се записва като:

$$\underline{\int e^{ipx} x^2\,dx = -(2\pi)\,\delta''(x)}$$

Елиптично уравнение

Всички елиптични уравнения имат аналогични свойства. Те ще се демонстрират на най-простия и най-често срещания случай на уравнение на Пуасон и Лаплас във "физическия" случай на тримерно пространство $\mathbb{R}^3$:

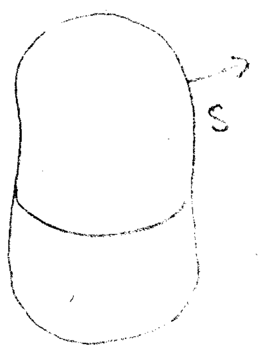
$$\Delta u = -d(\vec{x}) \,, \qquad (4.1)$$

$$\Delta u = 0 \,. \qquad (4.2)$$

Решенията на уравнението на Лаплас (4.2) се наричат "хармонични функции"

Област на решимост – отворено множество $V \subset \mathbb{R}^3$ или цялото пространство $\mathbb{R}^3$. Всички разглеждания тук ще бъдат за ограничена област $V \subset \mathbb{R}^3$. Границата на V: $\partial V = S$ (често ще означаваме S) ще се разглежда винаги ориентирана навън, както е показано на чертежа

Характеристични повърхнини



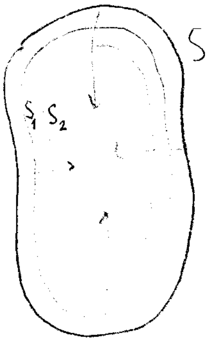
Нека $S = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid F(\vec{x}) = 0 \}$ е повърхност, определена от уравнението $F(\vec{x}) = 0$ и $\operatorname{grad} F(\vec{x}) \neq \vec{0}$ когато $\vec{x} \in S$.

Повърхността S е характеристична ако, съгласно (2.26): $\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_j} = 0$. В нашия случай това означава $\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(\vec{x})\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}(\vec{x})\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_3}(\vec{x})\right)^2 = 0$ при $\vec{x} \in S$ което е невъзможно ако $\operatorname{grad} F(\vec{x}) \neq 0$ при $\vec{x} \in S$.

Елиптичното уравнение няма характеристични повърхнини и всяка повърхнина е свободна. Как можем да определим единствено решение в област V заградена от повърхност S? На пръв поглед е естествено да зададем данни на Коши (функции U_s, V_s, дефинирани върху S) и да търсим решение за което

$$\begin{aligned} u(x) &= u_s(x), \quad x \in S \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) &= V_s(x) \quad x \in S \end{aligned} \tag{4.3}$$

Съгласно доказана теорема съществува единствено решение, удовлетворяващо (4.3) достатъчно близо до S. например до една "по-вътрешна" повърхност S_1 както е показано на рисунката. S_1 е също свободна и можем да продължим до S_2 и т.н. Можем ли да получим глобално решение в цялата област V? Изобщо не. Тръгвайки от различни точки на S можем във вътрешните точки да получаваме различни стойности.



Съществуват специални набори гранични условия които осигуряват съществуване и единственост на решението в цялата област V. Това са следните гранични задачи

1. $u(x) = u_s(x)$, $x \in S$. Дирихле

2. $\frac{\partial u}{\partial n}(x) = V_s(x)$, $x \in S$. Нойман (4.5)

3. $\frac{\partial u}{\partial n}(x) + \alpha(x)\,u(x) = W_s(x)$; $\alpha(x) \geq 0$, $x \in S$. Смесена

Коментар

1. Граничните задачи при които $u_s = 0$, $v_s = 0$, $w_s = 0$ се наричат хомогенни
2. При задачата на Дирихле, функцията u_s е произволна гладка (или частично гладка)
3. При задачата на Нойман има условие което v_s трябва да удовлетворява. Ако u е решение на (4.1) във V и на границата е изпълнено $\frac{\partial u}{\partial n}(x) = v_s(x)$ получаваме следното условие

$$\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = -\alpha$$

$$\iiint_V \operatorname{div} \operatorname{grad} u(x)\, d^3x = -\iiint_V \alpha(x)\, d^3x$$

$$\oint\!\!\oint_S \operatorname{grad} u(x) \cdot d\vec{s} = -\iiint_V \alpha(x)\, d^3x$$

$$\oint\!\!\oint_S \frac{\partial u}{\partial n}(x)\, |d\vec{s}| = -\iiint_V \alpha(x)\, d^3x$$

$$\Rightarrow \quad \oint\!\!\oint_S v_s(x)\, |d\vec{s}| = -\iiint_V \alpha(x)\, d^3x \qquad (4.4)$$

Винаги ще считаме, че (4.4) е изпълнено. В останалото $v_s(x)$ е произволна гладка (частично гладка) функция.

4. В смесената задача $\alpha(x)$ и $w_s(x)$ са произволни гладки, (частично гладки) функции.

Физически пример

V - хомогенно тяло с постоянни обемни източници на топлина. $u(\vec{x})$ е температура която е равновесна, независи от t но е различна в различни точки. Тя удовлетворява уравнение на Поасон

Гр. задача на Дирихле означава че на границата поддържаме температурата отнапред зададена: U_s.
Гр. задача на Нойман означава, че на границата поддържаме топлинния поток постоянен.
Условието (4.4) означава, че за да имаме стационарно решение трябва мощността на обемните източници на топлина да бъде равна на потока топлина който напуска тялото през границата S.
Хомогенната смесена гранична задача може да се запише така

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = -\alpha(x)u(x) \quad , x \in S$$

Потокът топлина на границата е пропорционален на температурата на границата. Физически тялото е поставено в термостат с температура нула и е обвито с безкрайно тънко цилиндър (както дрехите на тялото) има пропускателна способност която се описва с функцията $\alpha(x)$. Изискването $\alpha(x) \geq 0$ означава, че през цилиндъра топлината тече от по-топлото към по-студеното

Коментар

В граничните задачи (4.5) се задават "половината" от данните на Коши (4.3). Това е специфика на проблема. Изискването за глобално съществуване на решението (във цялото V) заедно с "половината" от данните на Коши определят решението еднозначно

Теорема за единственост

Ако съществува решение на (4.1) във V, удовлетворяващо някоя от граничните задачи, то е единствено

Доказателство

Допускаме, че u_1, u_2 са две решения на уравнението на Поасон удовлетворяващи едни и същи гранични условия. Тогава $u = u_1 - u_2$ е решение на уравнението на Лаплас

$\Delta u(x) = \Delta(u_1(x) - u_2(x)) = 0$ и удовлетворява

хомогенни гранични условия. Пресмятаме интеграла на Дирихле

$$\int\limits_V (\operatorname{grad} u)^2 d^3x = \int\limits_V (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} u + u \cdot \operatorname{div} \operatorname{grad} u) d^3x$$

$$= \int\limits_V \operatorname{div}(u \cdot \operatorname{grad} u) d^3x = \oiint\limits_S u \cdot \operatorname{grad} u \cdot d\vec{s} = \oiint\limits_S u \cdot \frac{\partial u}{\partial n} |d\vec{s}|$$

(Приложихме теоремата на Гаус за областта V, $\frac{\partial u}{\partial n}$ е производната по направление на единичния нормален вектор, насочен навън). За отделните гранични задачи получаваме

1 гр. зад.: $= \oiint\limits_S u_s \cdot \frac{\partial u}{\partial n} |d\vec{s}| = 0$, защото $u_s = 0$

2 гр. зад.: $= \oiint\limits_S u \cdot V_s |d\vec{s}| = 0$, защото $V_s = 0$

3 гр. зад. от $\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial n} = -\alpha u$, заместваме

$$\Rightarrow \int\limits_V (\operatorname{grad} u)^2 d^3x = - \oiint\limits_S \alpha(x) u^2(x) |d\vec{s}|$$

вземайки че $\alpha(x) \geq 0$ равенството е възможно само ако двете страни са нула.

И в трите случая $\int\limits_V (\operatorname{grad} u)^2 d^3x = 0$

Но $(\operatorname{grad} u(x))^2 \geq 0 \Rightarrow \operatorname{grad} u(x) = 0 \quad \forall x \in V$

$\Rightarrow u = u_1 - u_2 = const$. За отделните гранични задачи получаваме.

1. Дирихле : $u(x) = 0$, $x \in S$ $\Rightarrow$ $u_1 = u_2$
2. Нойман. условието $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ е автоматично изпълнено, защото u е константа $\Rightarrow$ $u_1 = u_2 + const$. Този произвол остава. При тази гранична задача решенията са определени с точност до обща адитивна константа.
3. $\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = 0 \Rightarrow \alpha . u(x) = 0 \Rightarrow u = 0$
$(x \in S)$

$\Rightarrow u_1(x) = u_2(x)$.

Т.е. при Дирихле и Смесена задача решението се определя еднозначно.

Съществуване. Доказателството е по-трудно и в тези лекции се пропуска. По нататък, в много представителни примери, когато областта на решимост е проста: паралелепипед, сфера, цилиндър решения удовлетворяващи произволни гранични условия ще бъдат конструирани.

Физическата интуиция създава убеденост, че решение съществува. Ако V е хомогенно тяло с постоянни обемни източници на топлина и поддържаме температурата на границата отнапред зададена то "очевидно" след дълго време ще се установи температурно разпределение което температурата няма да зависи от времето и това ще бъде решение на уравнение на Поасон удовлетворяващо гранични условия на Дирихле.

Фундаментално решение

Линейните ЧДУ, чрез своите свойства реализират един от основните принципи - принципа на суперпозицията. Полето създадено от система товари е сума на полетата създавани от отделните товари. Поради това, ако знаем полето на точков източник чрез граничен преход на безкрайно много безкрайно малки точкови източници можем, по принцип да намерим всяко решение. Обемната плътност на точков източник поставен в точка с радиус вектор $\vec{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ е $\delta(\vec{x}-\vec{\xi}) = \delta(x_1-\xi_1).\delta(x_2-\xi_2).\delta(x_3-\xi_3)$. Това определя важността на следното понятие.

Дефиниция. Фундаментално решение наричаме на уравнението наричаме решение на:

$$\Delta u(\vec{x}) = -\delta(\vec{x}-\vec{\xi}), \quad \xi \in V. \qquad (4.5)$$

Това е решение на уравнението на Поасон с дясна част - точков източник с големина единица поставен в $\vec{\xi}$. Фундаменталното решение зависи от $\vec{\xi}$ като от параметър. Точката ξ се нарича полюс на фундаменталното решение. Граничните условия не са фиксирани и ние имаме много различни фундаментални решения с един и същ полюс

Общ вид на фундаменталното решение

Нека u_1 и u_2 са две фундаментални решения с полюс в $\vec{\xi}$. Тогава $f(\vec{x}) = u_1(x) - u_2(x)$ удовлетворява уравнението $\Delta f(\vec{x}) = 0$, т.е. тя е хармонична. Тогава, очевидно, ако $u_1(\vec{x})$ е фундаментално решение с полюс в $\vec{\xi}$, то всяко друго фундаментално решение с полюс в $\vec{\xi}$ има вида

$$u(\vec{x}) = u_1(\vec{x}) + f(\vec{x}) \qquad (4.6)$$

където $f(\vec{x})$ е хармонична функция. Когато f пробягва всички хармонични функции $u(\vec{x})$, определено от (4.6) пробягва всички фундаментални решения с полюс в ξ

<u>Функция на Грийн</u> (за дадена област V)

Това е специално фундаментално решение $G(\vec{x},\vec{\xi})$ с полюс в $\vec{\xi}$ с възможно най-простите гранични решения. Т.е. $G(\vec{x},\vec{\xi})$ удовлетворява уравнението

$$\Delta G(\vec{x},\vec{\xi}) = -\delta(\vec{x}-\vec{\xi}), \quad \xi \in V \qquad (4.7)$$

и следните гранични условия

1. При гранична задача на Дирихле:

$$G(\vec{x},\vec{\xi}) = 0, \quad x \in S \qquad (4.8)$$

2. При гранична задача на Нойман:

$$\frac{\partial}{\partial n} G(\vec{x},\xi) = -\frac{1}{P}, \quad x \in S. \qquad (4.9)$$

където $P = \oiint_S |d\vec{S}|$ е площта на S. Поради (4.4) трябва да имаме $\oiint_S \frac{\partial}{\partial n} G(\vec{x},\vec{\xi})|d\vec{S}| = -\int_V \delta(\vec{x}-\vec{\xi})\,d^3x = -1$

Не можем да поискаме хомогенни гранични условия. За това искаме да са константни, така че (4.4) да бъде изпълнено.

3. При смесена гранична задача:

$$\frac{\partial}{\partial n} G(\vec{x},\vec{\xi}) + \alpha(x)\, G(\vec{x},\vec{\xi}) = 0, \quad x \in S. \qquad (4.10)$$

Съгласно общото твърдение, че решения на граничните задачи съществуват, функциите на Грийн, като специален вид решения съществуват. Те са определено еднозначно с изключение на гр. задача на Нойман където са определени с точност до адитивна константа. Функцията на Грийн зависи от полюса $\vec{\xi}$ като от параметър, а също така и от областта на решимост и избраната гранична задача.

Ако познаваме функцията на Грийн, ще можем да намерим решението на уравнението на Поасон при произволни гранични условия само с диференциране и интегриране (операции които се считат за "лесни" и "изпълними").

<u>Формула на Грийн</u>. Нека u и V са гладки функции дефинирани в областта V. Тогава

$$\iiint\limits_V (V\Delta u - u\Delta V)\, d^3x = \oiint (V\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial V}{\partial n})|d\vec{s}|. \quad (4.11)$$

<u>Доказателство</u>:

$$\int\limits_V (V\Delta u - u\Delta V)\, d^3x =$$

$$= \int\limits_V [V.\operatorname{div}.\operatorname{grad} u + \operatorname{grad} V.\operatorname{grad} u - u \operatorname{div}.\operatorname{grad} V - \operatorname{grad} V.\operatorname{grad} u]\, d^3x =$$

$$= \int\limits_V [\operatorname{div}(V.\operatorname{grad} u) - \operatorname{div}(u.\operatorname{grad} V)]\, d^3x =$$

$$= \int\limits_V \operatorname{div}(V.\operatorname{grad} u - u.\operatorname{grad} V)\, d^3x =$$

$$= \oiint\limits_S (V.\operatorname{grad} u - u.\operatorname{grad} V).\, d\vec{s} = \oiint (V\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial V}{\partial n})|d\vec{s}|$$

<u>Лема</u>: За всички гранични задачи, функцията на Грийн е симетрична

$$G(\vec{x}, \vec{\xi}) = G(\vec{\xi}, \vec{x}), \quad \vec{\xi} \neq \vec{x}; \ x, \xi \in V \qquad (4.12)$$

<u>Доказателство</u>

Прилагаме формулата на Грийн за функциите $v(\vec{x}) = G(\vec{x}, \vec{\xi}')$ и $u(\vec{x}) = G(\vec{x}, \vec{\xi}'')$, $\vec{\xi}' \neq \vec{\xi}''$:

Изчисляваме

$$A = \int_V [G(x, \xi')\Delta G(x, \xi'') - G(x, \xi'')\Delta G(x, \xi')]\, d^3x$$

$$= \int_V [-G(x, \xi')\delta(x - \xi'') + G(x, \xi'')\delta(x - \xi')]\, d^3x =$$

$$= -G(\xi'', \xi') + G(\xi', \xi'')$$

Пресмятаме интеграла A чрез формулата на Грийн

$$A = \oiint_S [G(x, \xi')\frac{\partial}{\partial n} G(x, \xi'') - G(x, \xi'')\frac{\partial}{\partial n} G(x, \xi')]\, |d\vec{S}|$$

1. При граничната задача на Дирихле:
$G(x, \xi') = 0$ & $G(x, \xi'') = 0$, $x \in S$, съгласно (4.8)
$\Rightarrow A = 0$

2. При смесената задача $\frac{\partial}{\partial n} G(x, \xi) = -\alpha(x)\, G(x, \xi)$.
тогава
$$A = \oiint_S [-G(x, \xi')\alpha(x) G(x, \xi'') + G(x, \xi'')\alpha(x) G(x, \xi')]\, |d\vec{S}| = 0$$

от $A = 0 \Rightarrow G(\xi'', \xi') = G(\xi', \xi'')$

3. При граничната задача на Нойман: $\frac{\partial}{\partial n} G(x, \xi) = -\frac{1}{P}$ при $x \in S$ и
$$A = \frac{1}{P} \oiint_S [G(x, \xi'') - G(x, \xi')]\, |d\vec{S}|$$

Но при тази гранична задача $G(x, \xi)$ е определена с точност до адитивна константа.

Можем да считаме, че за всяка точка $\xi \in V$ тя е подбрана така, че да бъде изпълнено

$$\oint\!\!\oint_S G(x,\xi)\,|d\vec{s}\,| = 0 . \qquad (4.13)$$

Това фиксира напълно функцията на Грийн за задачата на Нойман. Ще считаме винаги, че това е направено. При това уточнение очевидно $A = 0$ и теоремата е доказана.

<u>Следствие</u> от симетрията (4.12):

$$\Delta_\xi G(x,\xi) = -\delta(x-\xi) \qquad (4.14)$$

при I гр. зад. $\quad G(x,\xi) = 0 \quad , \xi \in S \quad , \qquad (4.15)$

при II гр. зад. $\quad \dfrac{\partial}{\partial \nu} G(x,\xi) = -\dfrac{1}{P} \quad , \xi \in S \quad , \qquad (4.16)$

при III гр. зад. $\quad \dfrac{\partial}{\partial \nu} G(x,\xi) + \alpha(\xi)\, G(x,\xi) = 0, \ \xi \in S . \qquad (4.17)$

Изрази като горните $\Delta_\xi G(x,\xi)$ означава

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} G(x,\xi) + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} G(x,\xi) + \frac{\partial^2}{\partial \xi_3^2} G(x,\xi)$$

, а $\dfrac{\partial}{\partial \nu} G(x,\xi)$ е нормалната производна по променливите ξ

$$\frac{\partial}{\partial \nu} G(x,\xi) = n_1(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi_1} G(x,\xi) + n_2(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi} G(x,\xi) + n_3(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi_3} G(x,\xi),$$

при $\xi \in S$

<u>Решаване на граничните задачи посредством функцията на Грийн.</u>

Нека $u(x)$ е решение на уравнението на Поасон за област V удовлетворяващо някоя гранична задача и $G(x,\xi)$ е функцията на Грийн за тази област и тази гранична задача. Разглеждаме и пресмятаме по различни начини израза

$$B(x) = \int_V [G(x,\xi)\Delta_\xi u - u(\xi)\Delta_\xi G(x,\xi)]\, d^3\xi$$

$$= \int_V [-G(x,\xi) d(\xi) + u(\xi)\delta(x-\xi)]\, d^3\xi =$$

$$= u(x) - \int_V G(x,\xi) d(\xi)\, d^3\xi \qquad (4.18)$$

Чрез прилагане формулата на Грийн получаваме

$$B = \oiint_S [G(x,\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}u(\xi) - u(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}G(x,\xi)]\,|d\vec{\sigma}|$$

($|d\vec{\sigma}|$ означава лицевия елемент когато интегрираме по променливите (ξ_1, ξ_2, ξ_3)).

За различните гранични задачи получаваме

I гр. задача $\quad G(x,\xi) = 0 \quad, \xi \in S \quad (4.15)$ и

$u(\xi) = u_s(\xi) \quad, \xi \in S$ и съответно

$$B = -\oiint \frac{\partial}{\partial\nu} G(x,\xi)\, u_s(\xi)\,|d\vec{\sigma}| \qquad (4.19)$$

II гр. задача $\quad \frac{\partial}{\partial\nu}G(x,\xi) = -\frac{1}{P} \quad, \frac{\partial}{\partial\nu}u(\xi) = V(\xi) \quad, \xi \in S$

и съответно:

$$B = \oiint_S G(x,\xi)\,V_s(\xi)\,|d\vec{\sigma}| + \frac{1}{P}\oiint_S u(\xi)\,|d\vec{\sigma}| \,. \qquad (4.20)$$

III гранична задача: $\quad \frac{\partial}{\partial\nu}G(x,\xi) = -\alpha(\xi) G(x,\xi), \quad \xi \in S,$

(4.17) и съответно

$$B = \oiint_S G(x,\xi)\left[\frac{\partial}{\partial\nu}u(\xi) + \alpha(\xi)\,u(\xi)\right]|d\vec{\sigma}| =$$

$$= \oiint_S G(x,\xi)\,W_s(\xi)\,|d\vec{\sigma}| \quad, \qquad (4.21)$$

поради (4.5).

Сравнявайки двата израза за B, получаваме

$$u(x) = \int\limits_V G(x,\xi)\, d(\xi)\, d^3\xi + \begin{cases} -\oiint\limits_S \frac{\partial}{\partial \nu} G(x,\xi)\, U_s(\xi)\, |d\vec{\sigma}| \\ \oiint\limits_S G(x,\xi) V_s(\xi) |d\vec{\sigma}| + \frac{1}{p} \oiint u(\xi) |d\vec{\sigma}| \\ \oiint\limits_S G(x,\xi) W_s(\xi) |d\vec{\sigma}| \end{cases} \qquad (4.22)$$

Горният израз дава търсеното единствено решение. В дясната част участват само известни величини. При задачата на Нойман има неопределена адитивна константа, но това е естествения произвол в този случай. При различните гранични задачи функцията на Грийн е изобщо различна въпреки че в (4.22) е означена с една и съща буква

Коментар

Ако областта на решимост не е компактна, а е, примерно, цялото пространство $\mathbb{R}^3$ задачата е по-сложна, защото граничните условия се заменят с асимптотични и понякога трябва да се посочва и скоростта на клонене. Това изследване тук се пропуска.

Функция на Грийн за цялото пространство.

Ще покажем, че функцията на Грийн за $\mathbb{R}^3$ е

$$G(x,\xi) = \frac{1}{4\pi |x-\xi|} \qquad (4.23)$$

Достатъчно е да проверим това при $\vec{\xi} = \vec{0}$

Тогава

$$G(x,0) = \frac{1}{4\pi r} \qquad (4.24)$$

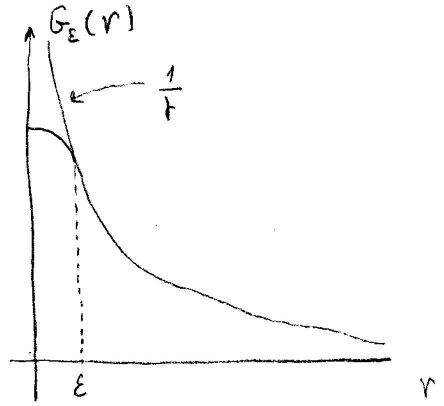
$r = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$. Трябва да покажем, че

$$\Delta \frac{1}{4\pi r} = -\delta(x) \qquad (4.25)$$

Разглеждаме

$$G_\varepsilon(\vec{x},0) = \begin{cases} \dfrac{1}{8\pi\varepsilon^3}(3\varepsilon^2 - r^2), & r<\varepsilon \\ \dfrac{1}{4\pi r} & r>\varepsilon \end{cases} \qquad (4.26)$$

Това е потенциалът на полето създавано от хомогенно натоварено кълбо с радиус ε и общо количество товари 1. Графика на $G_\varepsilon(\vec{x},0) = G_\varepsilon(r)$ е показан на чертежа



$G_\varepsilon(\vec{x},0) \to \dfrac{1}{4\pi r}$ в смисъл на обобщени функции

Но

$$\Delta G_\varepsilon(\vec{x},0) = \begin{cases} -\dfrac{3}{4\pi\varepsilon^3}, & r<\varepsilon \\ 0, & r>\varepsilon \end{cases} = -K_\varepsilon(\vec{x})$$

$$\Delta \frac{1}{4\pi r} = \Delta \lim_{\varepsilon\to 0} G_\varepsilon(\vec{x},0) = -\lim_{\varepsilon\to 0} K_\varepsilon(\vec{x}) = -\delta(\vec{x})$$

Това е пример на доказателство посредством регуляризация на обобщена функция

Коментар:

1. (4.23) е функция на Грийн в $\mathbb{R}^3$ за всяка една от граничните задачи. Нулевите гранични условия са заместени с нулева асимптотика
2. Грийновата функция за вс. област не решихме

има вида:

$$G(x, \xi) = \frac{1}{4\pi |x-\xi|} + f(x, \xi) , \qquad (4.27)$$

където $f(x, \xi)$ е хармонична функция.

<u>Функция на Грийн за кълбо при гранична задача на Дирихле.</u>

В този случай областта на решимост е кълбо с радиус a, което без ограничение на общността е с център в $\bar{0}$.

$$V = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x}^2 < a^2 \} , \qquad (4.28)$$

$$S = \partial V = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x}^2 = a^2 \} . \qquad (4.29)$$

Функцията на Грийн която търсим има вида

$$G(x, \xi) = \frac{1}{4\pi |x-\xi|} + f(x, \xi) ,$$

$x, \xi \in V$, където f е хармонична и трябва да бъде такава, че да бъде изпълнено

$$G(x, \xi)\Big|_{x\in S} = \left(\frac{1}{4\pi |x-\xi|} + f(x, \xi) \right)\Big|_{x \in S} = 0 \qquad (4.30)$$

Такава функция е

$$f(\vec{x}, \vec{\xi}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{a}{|\vec{\xi}|} \frac{1}{\left| \vec{x} - \frac{a^2}{\xi^2} \vec{\xi} \right|} . \qquad (4.31)$$

Точката $\vec{\xi}\,' = \frac{a^2}{\vec{\xi}^2} \vec{\xi}$ е извън V и във V $f(\vec{x}, \vec{\xi})$ е хармонична.

Означаваме

$$x \cdot \xi = |x||\xi| \cos\gamma \quad , \qquad (4.32)$$

$\gamma = \gamma(x, \xi)$. Тогава

$$G(x,\xi) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{|x-\xi|} - \frac{a}{\left|\,|\xi|x - \frac{a^2}{|\xi|}\xi\,\right|}\right] = \qquad (4.33)$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{[|x|^2+|\xi|^2-2|x||\xi|\cos\gamma]^{1/2}} - \frac{a}{[|x|^2|\xi|^2+a^4-2a^2|x||\xi|\cos\gamma]^{1/2}}\right].$$

при $|x| = a$

$$G = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{(a^2+|\xi|^2-2a|\xi|\cos\gamma)^{1/2}} - \frac{a}{(a^2|\xi|^2+a^4-2a^2 \cdot a|\xi|\cos\gamma)^{1/2}}\right] = 0$$

Т.е. (4.30) е изпълнено и G е функция на Грийн за задачата на Дирихле вътре. В основата на това лежи известен още в древна Гърция факт, че геометричното място на точки, за които отношението на разстоянията до две фиксирани точки е константа, е сфера.

За да намерим решението на граничната задача на Дирихле съгласно (4.22) трябва да пресметнем

$$\frac{\partial}{\partial\nu} G(x,\xi)\Big|_{\xi\in S} = \frac{\partial}{\partial|\xi|} G(x,\xi)\Big|_{\xi\in S} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[-\frac{1}{2}\,\frac{2|\xi|-2|x|\cos\gamma}{(|x|^2+|\xi|^2-2|x||\xi|\cos\gamma)^{3/2}} + \frac{1}{2}\,\frac{a(2|\xi||x|^2-2a^2|x|\cos\gamma)}{(|x|^2|\xi|^2+a^4-2a^2|x||\xi|\cos\gamma)^{3/2}}\right]\Bigg|_{|\xi|=a} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[-\frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}(a-|x|\cos\gamma)}{(a^2+|x|^2-2a|x|\cos\gamma)^{3/2}} + \frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}a(a|x|^2-a^2|x|\cos\gamma)}{(a^2|x|^2+a^4-2a^3|x|\cos\gamma)^{3/2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[-\frac{a\;(a-|x|\cos\gamma)}{a\,(a^2+|x|^2-2a|x|\cos\gamma)^{3/2}} + \frac{\cancel{a^2}(|x|^2-a|x|\cos\gamma)}{a^{\cancel{3}}(|x|^2+a^2-2a|x|\cos\gamma)^{3/2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \frac{|x|^2 - a^2}{a(|x|^2 + a^2 - 2a|x|\cos\gamma)^{3/2}}$$

Тогава решението на уравнение на Поасон, определено от граничната задача на Дирихле, съгласно (4.22) е

$$u(x) = \int\limits_{|\xi|<a} G(x,\xi)\, d(\xi)\, d^3\xi + \frac{1}{4\pi} \oint\limits_{|\xi|=a} \frac{(a^2 - |x|^2)\, U_s(\xi)\, |d\vec{\sigma}|}{a(|x|^2 + a^2 - 2a|x|\cos\gamma)^{3/2}}, \quad (4.33)$$

където $G(x,\xi)$ е определена от (4.33).
Ако центърът на кълбото е в точката $\vec{x}_0$ трябва в (4.33) да заместим $\vec{x} \to \vec{x} - \vec{x}_0$, $\vec{\xi} \to \vec{\xi} - \vec{x}_0$:

$$G(x,\xi) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{|x-\xi|} - \frac{a}{|\xi - x_0|} \frac{1}{\left| x - x_0 - \frac{a^2}{|\xi - x_0|^2} (\xi - x_0) \right|} \right],$$

<u>Свойства на хармоничните функции.</u>

Хармоничните функции са решения на уравнението на Лаплас, $\Delta u = 0$. В случая, когато областта на решимост е кълбо, граничната задача ги определя напълно и съгласно (4.33)

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \oint\limits_{|\xi|=a} \frac{(a^2 - |x|^2)\, U_s(\xi)}{a(|x|^2 + a^2 - 2a|x|\cos\gamma)^{3/2}} |d\vec{\sigma}|, \quad (4.34)$$

$|x| < a$

Този интеграл се нарича интеграл на Поасон. Той определя хармоничните функции вов вътрешността на кълбото посредством стойностите ѝ върху границата. От това представяне произтичат много свойства:

1. Нека $u(x)$ е два пъти диференцируема функция, дефинирана в област $V \subset \mathbb{R}^3$ и хармонична във V (т.е. $\Delta u = 0$). Тогава u е безкрайно пъти диференцируема.

Нека $x_0 \in V$ и $B = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (x - x_0)^2 < a^2\}$ е достатъчно малко кълбо с център x_0, радиус a, такова, че $\overline{B} \subset V$. Нека $S = \partial V = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (x - x_0)^2 = a^2\}$ е неговата граница и $u_S = u|_S$ (рестрикцията на u върху S). Тогава, съгласно (4.34) във вътрешността на B, u се определя пълно от граничните си стойности u_S върху S:

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \oint\!\!\!\oint_{|\xi - x_0| = a} \frac{(a^2 - |x - x_0|^2)\, u(\xi) \cdot |d\vec{\sigma}|}{a(|x - x_0|^2 + a^2 - 2a|x - x_0|\cos\gamma)^{3/2}}, \qquad (4.35)$$

$x \subset B$. (напомняме, че $(x - x_0).(\xi - x_0) = |x - x_0|.|\xi - x_0|\cos\gamma$)

В дясната част на (4.35) се интегрира по променливите ξ които пробягват $S = \partial V$. Зависимостта от x е като от параметър при интегрирането и е експлицитна. Условията за диференциране под знака на интеграла са изпълнени и можем да диференцираме по (x_1, x_2, x_3) произволен брой пъти.

2. Теорема за средните стойности

Нека u е хармонична функция, дефинирана във V, $x_0 \in V$ произволна точка и $B = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x - x_0| < a\}$ е кълбо с център x_0, радиус a, такова че $\overline{B} \subset V$. Тогава средната стойност на u върху сферата $S = \partial V$ е равна на стойността на u в центъра x_0.

Доказателство

За хармоничната функция u, за вътрешността на кълбото V е в сила (4.35). Изчисляваме (4.35) за $x = x_0$

$$u(x_0) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{|\xi - x_0| = a} \frac{a^2 u(\xi)}{a \cdot (a^2)^{3/2}} |d\vec{\sigma}| = \frac{1}{4\pi a^2} \iint\limits_S u(\xi) |d\vec{\sigma}|.$$

Но $4\pi a^2$ е площта на сферата и последния интеграл има смисъл на средна стойност на функцията $u(x)$ върху S.

3. Принцип за максимума.

Нека u е хармонична функция, дефинирана във област $V \subset \mathbb{R}^3$. Тогава u не може да има локални екстремуми.

Доказателство.

Допускаме, че при $x_0 \in V$, u има локален минимум. Тогава съществува достатъчно малко затворено кълбо: $\overline{B} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x - x_0| \le a\}$ с център x_0, радиус a, такова че $B \in V$ и $\forall x \in \overline{B} : u(x) \geq x_0$, като за някои точки от $x \in \partial\overline{B} = S$ неравенството е строго. Тогава, съгласно теоремата за средните стойности имаме

$$u(x_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint\limits_S u(\xi) |d\vec{\sigma}| .$$

Но от неравенството $u(x_0) \le u(\xi)$ като за някои $\xi \in S : u(x_0) < u(\xi)$ следва че

$$u(x_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint\limits_S u(\xi) |d\vec{\sigma}| \overset{(>)}{<} \frac{1}{4\pi a^2} \iint\limits_S u(x_0) |d\vec{\sigma}| = \frac{4\pi a^2}{4\pi a^2} u(x_0)$$

което е противоречие.

Друга формулировка. Нека u е хармонична в ограничена област V, дефинирана и непрекъсната върху $S = \partial V$. Тогава u достига най-голямата си и най-малката си стойност върху границата. Действително $\bar{V}$ е ограничено и затворено множество в $\mathbb{R}^3$ и всяка непрекъсната функция, дефинирана върху $\bar{V}$ е ограничена и достига най-голямата си и най-малката си стойност. Ако u достига най-малката си стойност във вътрешна точка за $\bar{V}$ това би било локален минимум което е невъзможно.

Физически следствия

При стационарно разпределение на температурата $u(\vec{x})$ в хомогенно тяло без обемни източници на топлина най-топлата и най-студената точка са на стените. Примерно ако имаме стационарно разпределение на температура в една стая през зимата най-топло е на повърхността на радиатора, най-студено е на повърхността на прозореца.

Ако $u(x)$ е потенциал на електростатично поле извън товарите създаващи полето, то u е хармонична функция и няма локални минимуми. Точков товар във външно електростатично поле не може да бъде устойчив.

4. Хармонични функции в цялото пространство

Теорема

Нека u е хармонична функция, дефинирана в $\mathbb{R}^3$ и удовлетворява оценката

$$|u(x)| \leq C(1+|x|)^m \tag{4.36}$$

където $C>0$ и $m>0$. Тогава $u(x_1,x_2,x_3)$ е полином!

Доказателство

Съгласно допускането (4.36) и е регулярно бавно растяща обобщена функция и има фурие образ.

$$\tilde{u}(p) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{i p . x} u(x) \, d^3x \quad , \qquad (4.37)$$

където

$$u(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i(p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3)} \tilde{u}(p_1, p_2, p_3) \, d^3p \, . \qquad (4.38)$$

Заместваме (4.38) в уравнението $\Delta u = 0$ и получаваме

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i(p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3)} (-p_1^2 - p_2^2 - p_3^2) \, \tilde{u}(p_1 p_2 p_3) \, dp_1 dp_2 dp_3 = 0$$

Тъй като фурие преобразуването е взаимно еднозначно, получаваме алгебричното уравнение

$$\vec{p}^{\,2} \, \tilde{u}(\vec{p}) = 0 \qquad (4.39)$$

Следователно $\tilde{u}(p)$ е обобщена функция с носител в една точка $p = (p_1, p_2, p_3) = \vec{0}$. Тогава $\tilde{u}(p)$ е крайна линейна комбинация на δ функция и нейни частни производни

$$\tilde{u}(p) = \sum_{r=0}^{N} \sum_{\mu_1 \ldots \mu_r} a_{\mu_1 \ldots \mu_r} \partial_{p_{\mu_1}} \ldots \partial_{p_{\mu_r}} \delta(p) \qquad (4.40)$$

където коефициентите $a_{\mu_1 \ldots \mu_r}$ не са съвсем произволни, а такива че да се удовлетворява (4.39). Сега обаче се интересуваме само от вида на функцията $u(x)$, ($\tilde{u}(p)$):

$$u(x) = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{u}] = \mathcal{F}^{-1}\Big[\sum_{r=0}^{N} \sum_{\mu_1\dots\mu_r} a_{\mu_1\dots\mu_r}\, \partial_{p_{\mu_1}}\dots\partial_{p_{\mu_r}} \delta(p)\Big] =$$

$$= \sum_{r=0}^{N} \sum_{\mu_1\dots\mu_r} a_{\mu_1\dots\mu_r}\; x_{\mu_1}\dots x_{\mu_r}\, (i)^r \underbrace{\mathcal{F}^{-1}[\delta]}_{=\frac{1}{(2\pi)^3}} .$$

Но каквито и да са коефициентите $a_{\mu_1\dots\mu_r}$ това е полином (от степен ненадвишаваща N) на променливите x_1, x_2, x_3.

Хомогенни хармонични функции.

Напомняме, че една функция е хомогенна, със степен на хомогенност l ако

$$f(\lambda x) = \lambda^l f(x) , \qquad (4.41)$$

за всяко $\lambda \in \mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{R}^3$. Хомогенните функции удовлетворяват уравнението на Ойлер

$$\sum_{i=1}^{3} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = l .\, f(x) . \qquad (4.42)$$

Ще разглеждаме само случаите, когато $l \geq 0$. Тогава f е дефинирано в цялото пространство $\mathbb{R}^3$. Хомогенна (гладка) функция f е регулярна, бавно растяща обобщена функция. За нея е изпълнено

$$|f(x)| \leq C(1+|x|)^l \qquad (4.43)$$

където C е най-голямата стойност на $|f(x)|$ ограничена върху единичната сфера $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, |x| = 1\}$. Действително S^2 е ограничено и затворено множество. Ограничението $|f(x)|\big|_{S^2}$ е непрекъсната функция, която достига най-голямата си стойност, означено с C.

Тогава: $|f(x)| = \left| f\left(|x| \cdot \frac{x}{|x|}\right) \right| = |x|^l \left| f\left(\frac{x}{|x|}\right) \right| \leq$

$\leq |x|^l \cdot C \leq C(1+|x|)^l$.

Съгласно предишната теорема, получаваме, че хомогенните хармонични функции са хомогенни полиноми. Тогава степента на хомогенност е цяло число! : $l = 0, 1, 2, \ldots$ Останалите стойности са забранени. Примерно не съществува хомогенна хармонична функция в цялото пространство $\mathbb{R}^3$ със степен на хомогенност $3/2$, $\sqrt{2}$, и.т.н.

Означаваме с $\mathcal{H}^l$ множеството на всички хомогенни хармонични полиноми от степен l ($\vec{x} \in \mathbb{R}^3$).

1. $\mathcal{H}^l$ е векторно пространство. Трябва да се съобрази, че сумата на хомогенни полиноми е хомогенен полином от същата степен, и че сума на хармонични полиноми е отново хармоничен полином.
2. $\mathcal{H}^l$ е векторно пространство с размерност $\dim(\mathcal{H}^l) = 2l+1$

Примери:

$l = 1$, $\dim(\mathcal{H}^1) = 3$. Базис на пространството от хармонични полиноми от степен 1 са мономите x_1, x_2, x_3.

$l = 2$, $\dim(\mathcal{H}^2) = 5$. Базис на хомогенните хармонични полиноми от степен 2 са полиномите: $x_1 . x_2$, $x_1 . x_3$, $x_2 . x_3$, $x_1^2 - x_2^2$, $x_1^2 - x_3^2$.

Доказателство

Означаваме с R^ℓ мн. на всички хомогенни полиноми на променливите (x_1, x_2, x_3) от степен ℓ. Те образуват векторно пространство с базис: мономите $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}$ с $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\ell$.
Неговата размерност е $\dim R^\ell = \binom{\ell+2}{\ell}$.
Това се изчислява примерно така:
Разглеждаме развитието в ред

$$\left(\frac{1}{1-z}\right)^3 = (1+z+z^2+z^3+\cdots)(1+z+z^2+z^3+\cdots)(1+z+z^2+z^3+\cdots)$$

$$= 1 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + \cdots = \sum_{\ell=0}^{\infty} C_\ell z^\ell . \qquad (4.44)$$

Коефициентите C_ℓ са цели числа. Коефициентът пред z^ℓ показва колко пъти z^ℓ се среща при разкриване на скобите в (4.44). Всеки базисен моном: $x^{\alpha_1} x^{\alpha_2} x^{\alpha_3}$, $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\ell$ съответства точно на едно появяване на z^ℓ при умножение на редовете: от първия ред се взима z^{α_1} което се умножава с z^{α_2} от втория ред и z^{α_3} от третия ред. и така взаимно еднозначно се описват всички възможности.
Следователно

$$C_\ell = \dim(R^\ell) .$$

От друга страна имаме директно развитие в ред

$$\left(\frac{1}{1-z}\right)^3 = (1-z)^{-3} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \binom{-3}{\ell} (-z)^\ell = \sum_{\ell=0}^{\infty} \binom{-3}{\ell} \cdot (-1)^\ell \cdot z^\ell$$

Сравнявайки двете развития получаваме

$$\dim(R^\ell) = C_\ell = \binom{-3}{\ell}(-1)^\ell = \frac{-3(-3-1)\cdots(-3-\ell+1)(-1)^\ell}{\ell!} =$$

$$= \frac{(\ell+2)(\ell+1)\cdots(\ell+2-\ell+1)}{\ell!} = \binom{\ell+2}{\ell}.$$

По-нататък, означаваме както обикновено $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Нека $f \in R^{\ell-2}$, очевидно $r^2 . f \in R^\ell$. Пресмятаме

$$\Delta(r^2 f) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}((x_1^2+x_2^2+x_3^2).f(x)) =$$

$$= 6.f + 4\sum_{i=1}^{3} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + r^2 \Delta(f) =$$

$$= 6f + 4(\ell-2)f + r^2\Delta(f).$$

Тук се отчита, че f е хомогенна функция със степен на хомогенност $\ell-2$ и (4.42) е в сила
Окончателно

$$\Delta(r^2 f) = (4\ell-2)f + r^2\Delta(f). \qquad (4.45)$$

Нека сега $f_k \in R^{\ell-2k}$, очевидно $r^{2k}.f_k \in R^\ell$.
Прилагаме (4.45) k-пъти

$$\Delta(r^{2k} f_k) = \Delta(r^2 . r^{2k-2} . f_k) =$$

$$= (4\ell-2)\, r^{2k-2}.f_k + r^2\Delta(r^{2k-2}.f_k) =$$

$$= (4\ell-2)\, r^{2k-2}.f_k + r^2(4(\ell-2)-2)\, r^{2k-4} f_k + r^4\Delta(r^{2k-4} f_k) =$$

$$= (4\ell-2)\, r^{2k-2} f_k + r^2(4(\ell-2)-2)\, r^{2k-1} f_k + \cdots +$$
$$+ r^{2k-2}(4(\ell-2(k-1))-2) f_k + r^{2k}\Delta(f_k) =$$

$$= r^{2k-2} f_k \left[4(\ell + \ell-2 + \cdots + \ell-2(k-1)) - 2k\right] + r^{2k}\Delta(f_k).$$

Но в квадратните скоби имаме

$$[\ldots] = 4\ell k - 8(1+2+\cdots+k-1) - 2k =$$

$$= 4\ell k - 8\frac{k(k-1)}{2} - 2k = 2k(2\ell-2k+1)$$

Окончателно получаваме.

$$\Delta(r^{2k} f_k) = 2k(2l-2k-1)\, r^{2k-2} f_k + r^{2k}\Delta(f_k). \quad (4.46)$$

Съвкупността на всички полиноми от вида $r^2 \cdot f$, $f \in R^{l-2}$ (т.е. $r^2 R^{l-2}$) очевидно образуват векторно подпространство в R^l

<u>Лема</u>

$$R^l = \mathcal{H}^l \oplus r^2 R^{l-2}. \quad (4.47)$$

<u>Доказателство</u>.

1. Единственият общ елемент на двете подпространства е $\{\vec{0}\}$. т.е.

$$\mathcal{H}^l \cap r^2 R^{l-2} = \{0\} \quad (4.48)$$

Допускаме, че полином от вида $r^2 f_1$ е хармоничен. Той сигурно има вида $r^{2k} f_k$, $k = 1, 2, \dots$, $k \le \frac{l}{2}$, като $f_k \in R^{l-2k}$ не се дели на r^2. По предположение

$$0 = \Delta(r^{2k} f_k) = 2k(2l-2k+1)\, r^{2k-2} f_k + r^{2k}\Delta(f_k). \quad (4.49)$$

Но $2l \geq 2k \Rightarrow$ коефициентът пред $r^{2k-2} f_k$ е $\neq 0$ и получаваме след съкращение на r^{2k-2}:

$$f_k = \frac{1}{2k(2l-2k+1)}\, r^2 \Delta(f_k)$$, т.е. f_k се дели на r^2 което противоречи на допускането.

Тогава очевидно

$$\dim(\mathcal{H}^l) + \dim(r^2 R^{l-2}) \le \dim(R^l) \quad (4.50)$$

2. Операторът на Лаплас е линейно изображение

$$\Delta : R^l \to R^{l-2}$$

По дефиниция $\mathcal{H}^l = \ker(\Delta)$ и

$$\dim(\mathcal{H}^l) \geq \dim(R^l) - \dim(R^{l-2}).$$

(Броят на параметрите описващи решенията е равен или по-голям на броя на неизвестните — броя на уравненията). т.е.

$$\Rightarrow \dim(\mathcal{H}^l) + \dim(r^2 R^{l-2}) \geqslant \dim(\mathcal{R}^l) \qquad (4.51)$$

$(\dim(r^2 R^{l-2}) = \dim(R^{l-2}))$.

От (4.51) и (4.5) следва че

$$\dim(\mathcal{H}^l) + \dim(r^2 R^{l-2}) = \dim(R^l)$$

което заедно с (4.48) доказва лемата.

Остава да пресметнем

$$\dim(\mathcal{H}^l) = \dim(R^l) - \dim(R^{l-2}) = \binom{l+2}{l} - \binom{l}{l-2} = 2l+1.$$

Пространствата от хомогенни хармонични полиноми играят основна роля при въвеждането на сферичните функции.

Разделяне на променливите (Метод на Фурие)

Първо ще илюстрираме основната същност. Нека имаме линейно ч.д.у. от II ред за функция на две променливи от вида

$$a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x).u + d(y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + e(y)\frac{\partial u}{\partial y} + f(y)u = 0 \qquad (4.52)$$

Тук променливите са "разделени" и това дава възможност да намерим решение на (4.52) от вида

$$u(x,y) = X(x)\,.\,Y(y) \qquad (4.53)$$

посредством решаване на обикновени диференциални уравнения. Тук $X(x)$ е функция само на x, Y е функция само на y. Разбира се, има и решения които не могат да се представят в този вид.

Заместваме (4.53) в (4.52)

$$(a\ddot{X}(x) + b\dot{X}(x) + cX(x)).Y(y) + (d.\ddot{Y}(y) + e.\dot{Y}(y) + f.Y(y)).X = 0.$$

Делим двете страни на $X(x).\,Y(y)$

$$\underbrace{(a\ddot{X}(x) + b\dot{X}(x) + cX(x))\frac{1}{X(x)}}_{=\alpha} + \underbrace{(d\ddot{Y}(y) + e.\dot{Y}(y) + f.Y(y))\frac{1}{Y(y)}}_{=\beta} = 0. \quad (4.54)$$

Едното събираемо е функция само на x а другото функция само на y. За да бъде сумата равна на нула, тъждествено по x, y трябва всяко събираемо да е константа и сумата на тези константи да е нула. (Ако фиксираме x и меним y, (4.54) трябва да е в сила тъждествено по y. Но x е фиксирано и първото събираемо е константа. Следователно и второто събираемо трябва да е константа когато y се мени) $\Rightarrow \beta = -\alpha$. Получаваме от (4.54) обикновени диференциални уравнения за $X(x)$ и $Y(y)$:

$$a(x)\ddot{X}(x) + b(x)\dot{X}(x) + c(x)X(x) = \alpha X(x), \quad (4.55)$$
$$d(y)\ddot{Y}(y) + e(y)\dot{Y}(y) + f(y)Y(y) = -\alpha Y(y). \quad (4.56)$$

Константата α в (4.54) ($\beta = -\alpha$) се нарича константа на разделяне и е произволна. Нека $X_i(x,\alpha)$, $Y_i(y,\alpha)$, $i = 1,2$ са двойка линейно независими решения на (4.55) и (4.56). То произволна линейна комбинация

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(\alpha)\, X_i(x,\alpha)\, Y_j(y,\alpha)$$

е решение на (4.52), при всяка константа на разделяне. Понеже уравнението (4.52) е линейно

Сумата на решения е решение и тъй като

$$\int_{\Delta} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(\alpha) X_i(x,\alpha) Y_j(y,\alpha)\, d\alpha$$

също е решение, или ако имаме зададена редица от стойности на константата на разделяне $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_k$ съответно

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(\alpha_k) X_i(x,\alpha_k) Y(y,\alpha_k) \qquad (4.57)$$

е решение. По този начин можем да получим общото решение. Т.е. при различни гранични задачи можем да подберем константите α_k и коефициентите $a_{ij}(\alpha_k)$ така, че (4.57) да е търсеното единствено решение удовлетворяващо граничната задача.

Разделяне на променливите за уравнението на Лаплас в декартови координати.

Пример: Задача на Дирихле за паралелепипед

Област на решимост: $x \in [0,a]$, $y \in [0,b]$, $z \in [0,c]$

Гранични условия на Дирихле

$$u(0,y,z) = u(a,y,z) = 0$$
$$u(x,0,z) = u(x,b,z) = 0 \qquad (4.58)$$
$$u(x,y,0) = 0; \quad u(x,y,c) = u_s(x,y)$$

Особеност

∂V е частично гладка повърхнина. Не е задължително $u_s(x,y)$ да е нула по границата на горната основа. Граничните стойности могат да бъдат частично гладки функции.

Уравнението
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (4.59)$$

допуска разделяне на променливите. Търсим решение от вида
$$u(x,y,z) = X(x)\,Y(y)\,Z(z). \qquad (4.60)$$
Заместваме в (4.59):
$$\frac{d^2X}{dx^2}.Y Z + \frac{d^2Y}{dy^2}.X.Z + \frac{d^2Z}{dz^2}X.Y = 0 \qquad (4.61)$$

Делим на $X.Y.Z$:
$$\underbrace{X''.\frac{1}{X}}_{-\alpha^2} + \underbrace{Y''.\frac{1}{Y}}_{-\beta^2} + \underbrace{Z''.\frac{1}{Z}}_{\gamma^2} = 0, \qquad (4.62)$$

$\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$. Означаваме константите с явно посочване на знака. При отрицателна константа имаме осцилиращо решение, при положителна – монотонно: Съответните общи решения са:

$X''(x) = -\alpha^2 X(x) \Rightarrow X(x) = A_1\cos\alpha x + B_1\sin\alpha x$

$Y''(y) = -\beta^2 Y(y) \Rightarrow Y(y) = A_2\cos\beta y + B_2\sin\beta y$

$Z''(z) = \gamma^2 Z(z) \Rightarrow Z(z) = A_3 e^{\gamma z} + B_3 e^{-\gamma z}$

При всеки избор на A_i, B_i, $i=1,2,3$, α и β ($\gamma = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$):

$$u = (A_1\cos\alpha x + B_1\sin\alpha x)(A_2\cos\beta y + B_2\sin\beta y)(A_3 e^{\gamma z} + B_3 e^{-\gamma z})$$

е решение на уравнението на Лаплас (4.59)

Искаме да подберем свободните константи така, че да се удовлетворяват граничните условия

$0 = u(0,x,y) = X(0).Y(y).Z(z), \ \forall y\in(0,b), \forall z\in(0,c)$

$\Rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow A_1.\cos 0 + B_1\sin 0 = 0 \Rightarrow A_1 = 0$

$0 = u(a,x,y) = X(a)\,Y(y)\,Z(z), \ \forall y\in(0,b), \forall z\in(0,c)$

$\Rightarrow B_1\sin\alpha a = 0 \Rightarrow \alpha a = n\pi, \ n=1,2,3,\dots$

$\Rightarrow \alpha_n = \dfrac{n\pi}{a}$

Аналогично за $Y(y)$:

$Y(0) = 0 \Rightarrow A_2 = 0$

$Y(b) = 0 \Rightarrow B_2 . \sin \beta b = 0 \Rightarrow \beta_m = \frac{m\pi}{b}$, $m = 1, 2, 3, \ldots$

За $Z(z)$ получаваме

$0 = u(x, y, 0) \Rightarrow Z(0) = 0 \Rightarrow A_3 . e^0 + B_3 . e^0 = 0$

$\Rightarrow A_3 + B_3 = 0 \Rightarrow B_3 = - A_3$

$\Rightarrow Z(z) = A_3 \frac{e^{\gamma z} - e^{-\gamma z}}{2} . 2 = \frac{A_3}{2} \, sh \, \gamma z .$

Получихме изброимо много решения от вида

$$A_{nm} \sin \frac{n\pi}{a} x . \sin \frac{m\pi}{b} y \; sh \, \gamma_{nm} z \qquad , \qquad (4.63)$$

където $\gamma_{nm} = \sqrt{\alpha_n^2 + \alpha_m^2} = \pi \sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2}$,

които удовлетворяват всички хомогенни гранични условия с изключение на горната основа. Уравнението на Лаплас (4.59) е линейно и сума на решения (от вида 4.63) е също решение удовлетворяващо хомогенните гранични условия.

Идея: Да напишем ред от решения (имащи вида 4.63) и да подберем константите A_{nm} така, че редът да определя решение, удовлетворяващо нехомогенните гранични условия при $z = c$

$$u(x, y, z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} \sin \frac{n\pi}{a} x . \sin \frac{m\pi}{b} y . sh \, \gamma_{nm} z$$

$$u(x, y, c) = \sum_{n,m} A_{nm} \sin \frac{n\pi}{a} x . \sin \frac{m\pi}{b} y . sh \, \gamma_{nm} c = u_s(x, y) \qquad (4.64)$$

Това е задача за развитие в ред на функцията $u_s(x, y)$. В интервала $[0, a]$, функциите $\sin \frac{n\pi}{a} x$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ е пълна ортогонална система със съотношения за ортогоналност:

$$\int_0^a \sin\frac{n\pi}{a}x \cdot \sin\frac{k\pi}{a}x \, dx = \frac{a}{2}\delta_{nk} \qquad (4.65)$$

Аналогично и $\sin\frac{m\pi}{b}y$ е пълна ортогонална система функции. Изразът в (4.64) представлява развитие в двоен ред на функцията $U_s(x,y)$. Всяка частично гладка функция допуска такова развитие. Константите A_{nm} се определят посредством съотношенията за ортогоналност. Ще извършим сметките подробно. Умножаваме двете страни на (4.64) с $\sin\frac{k\pi}{a}x \cdot \sin\frac{l\pi}{b}y$ и интегрираме:

$$\sum_{nm} A_{nm} \cdot \operatorname{sh}\gamma_{nm}c \cdot \int_0^a\int_0^b \sin\frac{n\pi}{a}x \cdot \sin\frac{k\pi}{a}x \cdot$$

$$\cdot \sin\frac{m\pi}{b}y \, \sin\frac{l\pi}{b}y \, dx\,dy = \int_0^a\int_0^b U_s(x,y) \sin\frac{k\pi}{a}x \, \sin\frac{l\pi}{b}y \, dx\,dy$$

$$\sum_{nm} A_{nm} \operatorname{sh}\gamma_{nm}c \cdot \frac{a}{2}\delta_{nk} \cdot \frac{b}{2}\delta_{ml} = \int_0^a\int_0^b U_s(x,y) \cdot \sin\frac{k\pi}{a}x \cdot \sin\frac{l\pi}{b}y \cdot dx\,dy$$

$$\Rightarrow \quad A_{kl} \cdot \operatorname{sh}\gamma_{kl}c \cdot \frac{a \cdot b}{4} = \int_0^a\int_0^b U_s(x,y) \cdot \sin\frac{k\pi}{a}x \cdot \sin\frac{l\pi}{b}y \cdot dx\,dy$$

$$\Rightarrow A_{kl} = \frac{4}{a \cdot b \cdot \operatorname{sh}\pi\sqrt{\left(\frac{k}{a}\right)^2 + \left(\frac{l}{b}\right)^2}\cdot c} \int_0^a\int_0^b U_s(x,y) \cdot \sin\frac{k\pi}{a}x \cdot \sin\frac{l\pi}{b}y \cdot dx\,dy \quad . \qquad (4.66)$$

Съгласно общата теория, коефициентите (4.66) заместени в (4.64) определят сходящ ред. Той е решение което удовлетворява всички гранични условия на Дирихле.

<u>Коментар</u>: Системата функции $\sin\frac{n\pi}{a}x$, $n = 1, 2, \dots$ е пълна и ортогонална в интервала $[0, a]$

Това е частен случай на общата "Задача на Щурм-Лиувил", която ще се дискутира по-късно. Връзката между тези система функции и развитието в ред на Фурие е проста. В интервала $[-a,a]$ системата функции: $\frac{1}{2}$, $\cos\frac{n\pi}{a}x$, $\sin\frac{n\pi}{a}x$ е пълна, ортогонална и определя развитие в ред на Фурие (в интервала $[-a,a]$):

$$\varphi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{a}x + b_n\sin\frac{n\pi}{a}x\right). \qquad (4.67)$$

$T=2a$ е периодът и част от съотношенията за ортогоналност са

$$\int_{-a}^{+a}\sin\frac{n\pi}{a}x\cdot\sin\frac{k\pi}{a}x\,.dx = \frac{T}{2}\delta_{nk} = a\,\delta_{nk}$$

$$\Rightarrow 2\int_{0}^{a}\sin\frac{n\pi}{a}x\cdot\sin\frac{k\pi}{a}x\,dx = a\,\delta_{nk}$$

а това е точно (4.65).

Ако $\varphi(x)$ е дефинирана в $[0,a]$, продължаваме я като <u>нечетна</u> в $[-a,a]$, (т.е. $\varphi(-x)=-\varphi(x)$). Тогава в $[-a,a]$, $\varphi(x)$ има развитие (4.67) където a_0 и a_n, $n=1,2..$ са нули. Тогава в $[-a,a]$ и естествено и в $[0,a]$, остава развитието

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi}{a}x$$

<u>Коментар</u>: Подробно решеният пример показва следните закономерности които са общи за метода.

1. Методът е приложим за хомогенни уравнения
2. При използваните координати диференциалният оператор да допуска разделяне на променливите.
3. Областта на решимост е паралелепипед съставен от координатни равнини. (В криволинейни координати → криволинеен паралелепипед).

4. Граничните условия са хомогенни по всички стени с изключение на една.

5. Избираме константите на разделяне така, че за променливите, за които на двойките срещуположни стени имаме хомогенни гранични условия, да получим осцилиращи решения (в нашия пример – променливите x и y), а за останалата монотонно решение. Осцилиращите решения, удовлетворяващи хомогенни гранични условия образуват пълна ортогонална система и развитието в ред по нея е възможно. [Това е следствие от общата теория на самоспрегнатите оператори и по-специално така наречената "задача на Щурм-Лиувил".]

6. Общата задача на Дирихле се представя като суперпозиция на 6 случая при които граничните условия са хомогенни върху всички стени с изключение на една и така се изредят всички стени.

7. Уравнението на Поасон $\Delta u = -\rho(x)$ се свежда към горния пример. Намираме едно частно решение $\tilde{u}$: $\Delta\tilde{u} = -\rho(x)$. Тогава ако u е единственото търсено решение, $v = u - \tilde{u}$ удовлетворява $\Delta v = 0$ и гранични условия $v(x) = u_s(x) - \tilde{u}(x)$, $x \in S = \partial V$. v се намира по описаната процедура.

Разделяне на променливите за оператора на Лаплас в цилиндрични координати. Цилиндрични функции.

Операторът на Лаплас допуска разделяне на променливите в криволинейни ортогонални (1) координати. Цилиндричните координати са такива. Разглеждаме този случай подробно. Цилиндричните координати се определят от равенствата

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \rho\cos\varphi \qquad &, \ \rho \geq 0 \\
x_2 &= \rho\sin\varphi \qquad & 0 \leq \varphi < 2\pi \\
x_3 &= z \qquad & -\infty < z < +\infty
\end{aligned}
\qquad (4.68)
$$

Върху множество с мярка нула в $\mathbb{R}^3$: $\rho = 0$ и $\varphi = 0$ те не са определени. Локалният репер за тези координати в точка (ρ, φ, z) е

$$
\begin{aligned}
\partial_\rho \vec{x} &= (\cos\varphi, \ \sin\varphi, \ 0) \\
\partial_\varphi \vec{x} &= (-\rho\sin\varphi, \ \rho\cos\varphi, \ 0) \\
\partial_z \vec{x} &= (\ 0 \ , \ 0 \ , \ 1)
\end{aligned}
\qquad (4.69)
$$

и очевидно той е ортогонален. Скаларните функции $u(x_1, x_2, x_3)$ се трансформират във функции от новите променливи $u(\rho, \varphi, z)$ и, както е известно, за тях уравнението на Лаплас има вида

$$\Delta u(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (4.70)$$

Матрицата пред старшите производни е

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Търсим решение от вида

$$u(\rho, \varphi, z) = R(\rho).\Theta(\varphi).Z(z). \qquad (4.71)$$

Заместваме в (4.70) и делим на $R(\rho).\Theta(\varphi).Z(z)$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)\frac{1}{R} + \frac{1}{\rho^2}\underbrace{\frac{d^2\Theta}{d\varphi^2}\cdot\frac{1}{\Theta}}_{-\nu^2} + \underbrace{\frac{d^2 Z}{dz^2}\frac{1}{Z}}_{k^2} = 0$$

Избирането на константата на разделяне $-\nu^2 < 0$ е задължително. Функциите по φ трябва да са периодични. Избирането на $k^2 \geq 0$ означава, че търсим решение монотонно по z. По късно ще разгледаме противоположния избор. Обикновените диференциални уравнения за $\Theta(\varphi)$ и $Z(z)$ се решават веднага:

$\Theta''(\varphi) = -\nu^2\,\Theta(\varphi) \Rightarrow$ независими решения: $\cos\nu\varphi$, $\sin\nu\varphi$
$Z''(z) = k^2\,Z(z) \Rightarrow$ ———————, ——————— e^{kz}, e^{-kz}

Уравнението за $R(\rho)$, "радиалната част" е по-сложно

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R = 0 \qquad (4.72)$$

Уравнението малко се опростява ако положим
$x = k\rho$, $\rightarrow R(x) = R(k\rho)$

$$\Rightarrow \frac{dR}{d\rho} = \frac{dR}{dx}\cdot\frac{dx}{d\rho} = \frac{dR}{dx}\cdot k\ ; \quad \frac{d^2R}{d\rho^2} = \frac{d^2R}{dx^2}\cdot k^2$$

$$\Rightarrow k^2 R''(x) + \frac{k}{\rho}R'(x) + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R(x) = 0 \ \Big|\cdot\frac{1}{k^2}$$

$$\Rightarrow R''(x) + \frac{1}{x}R'(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)R(x) = 0 \qquad (4.73)$$

или $x^2 R''(x) + x R'(x) + (x^2 - \nu^2)R(x) = 0$

Поради своята важност уравнението (4.73) е изучено подробно и си има име "Уравнение на Бесел".

То е изучено в общия случай, когато x е комплексна променлива и ν е комплексен параметър. Това е едно обикновено диференциално уравнение и общото решение е линейна комбинация на две линейно независими решения.
Терминология: Цилиндрична функция се нарича всяко решение на уравнението на Бесел.

Помощен материал

Γ-функцията на Ойлер се дефинира посредством интеграла:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt \quad . \qquad (4.74)$$

Той е сходящ при $Re(x) > 0$ и определя аналитична функция. Тя се продължава аналитично до функция дефинирана в $\mathbb{C}$ като в точките $0, -1, -2, \ldots$ има прости полюси с резидуми $(-1)^n \frac{1}{n!}$ при $x = -n$.

Основно свойство:

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$$

Доказателство. При $Re(x) > 0$

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} . t^x\, dt = - e^{-t} t^x \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t}\, dt^x =$$

$$= \int_0^\infty e^{-t} . t^{x-1} . x\, dt = x \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt = x\,\Gamma(x) .$$

Конкретни значения

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = - e^{-t}\Big|_0^\infty = 1$$

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = n(n-1)\ldots 2 . 1\,\Gamma(1) = n!$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}}\, dt = \text{/ смяна на пром. } t = u^2 \text{ /}$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-u^2} u^{-1} . u . du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi} .$$

$\Gamma(x+n+1) = (x+n)(x+n-1)\ldots x\,\Gamma(x) \Rightarrow \Gamma(x) = \frac{1}{x.(x+1)\ldots(x+n+1)}\Gamma(x+n+1) \;;\; Re(x) > -(n+1)$

$$\Gamma(n+\tfrac{1}{2}) = \Gamma(n-\tfrac{1}{2}+1) = (n-\tfrac{1}{2})\,\Gamma(n-\tfrac{1}{2}) =$$

$$= (n-\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{3}{2})\,\Gamma(n-\tfrac{3}{2}) = \dots =$$

$$= (n-\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{3}{2})\dots\tfrac{1}{2}\,\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3.1}{2^n}\sqrt{\pi}$$

Известно е, че за всяко $x \neq 0, -1, -2, \dots -n, \dots$ $\Gamma(x) \neq 0$ така, че $\frac{1}{\Gamma(x)}$ е добре дефинирана функция в цялата комплексна равнина $\mathbb{C}$.

С помощта на $\Gamma(x)$ можем да запишем едно частно решение на уравнението на Бесел във вид на степенен ред:

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \quad . \qquad (4.75)$$

Терминология.
Функцията $J_\nu(x)$ се нарича "функция на Бесел от ред ν" или само "функция на Бесел". ν е избран комплекснозначен параметър. Когато ν не е цяло число $J_\nu(x)$ е многозначна функция поради множителя преди сумата.

Лема: Редът (4.75) е сходящ

Доказателство. Отношението на два последователни члена е

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\dfrac{(-1)^{k+1}}{\Gamma(k+1+1).\Gamma(k+1+\nu+1)}\cdot\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k+2}}{\dfrac{(-1)^k}{\Gamma(k+1).\Gamma(k+1+\nu)}\cdot\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k}} =$$

$$= -\frac{\cancel{\Gamma(k+1)}.\cancel{\Gamma(k+\nu+1)}}{(k+1).\cancel{\Gamma(k+1)}.(k+\nu+1)\cancel{\Gamma(k+\nu+1)}}\left(\frac{x}{2}\right)^2 = -\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(k+1)(k+\nu+1)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

За вс. x, от известно място нататък отношението е по модул по-малко от единица. Редът е сходящ и $J_\nu(x)$ е коректно определена.

Лема: $J_\nu(x)$ е решение на уравнението на Бесел.

Доказателство. Проверяваме дали е изпълнено

$$x^2 J_\nu''(x) + x J_\nu'(x) - \nu^2 J_\nu(x) = -x^2 J_\nu(x) \quad . (4.75)$$

като заместваме $J_\nu(x)$ с реда (4.75)

След групиране на изразите пред еднаквите степени на x, за лявата част на (4.75) получаваме

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k[(2k+\nu)(2k+\nu-1)+(2k+\nu)-\nu^2]}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} =$$

$$[\cdots] = [4k^2+2k\nu-2k+2k\nu+\cancel{\nu^2}-\cancel{\nu}+\cancel{2k}+\cancel{\nu}-\cancel{\nu^2}] =$$
$$= 4k^2+4k\nu = 4k(k+\nu) .$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 4k(k+\nu)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} =$$

при $k=0$, първият член е 0 и сумирането започва от $k=1$. Можем да запишем

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 4k(k+\nu)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 4\cancel{k}\cancel{(k+\nu)}}{\cancel{k}\cdot\Gamma(k)\cdot\cancel{(k+\nu)}\Gamma(k+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} =$$

сменяме сумационния индекс $k=\ell+1$, $\ell=0,1,2.$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)(-1)^\ell \cdot \cancel{4}}{\Gamma(\ell+1)\Gamma(\ell+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\ell+\nu} \cdot \frac{x^2}{\cancel{4}} =$$

$$= -x^2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\Gamma(\ell+1)\Gamma(\ell+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\ell+\nu} = -x^2 J_\nu(x) .$$

$\Rightarrow J_\nu(x)$ е решение.

Тогава $J_{-\nu}(x)$ също е решение, защото в уравнението на Бесел участва $\nu^2 = (-\nu)^2$.

Твърдение

1. Когато ν не е цяло число, $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ са двойка линейно независими решения.

Линейната независимост се вижда от асимптотиката при $x \to 0$. Сравняваме

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

$$J_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k=0} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

При ν не цяло число $\Gamma(k \pm \nu + 1) \neq 0$, първият член $(k=0)$ в развитието на $J_{-\nu}$ е различен от нула. Тогава $J_\nu(x) \to 0$, $J_{-\nu}(x) \to \infty$ при $x \to 0$. (при предположение, че $\nu > 0$).

2. Когато ν е цяло число; ν 0, 1, 2, ... $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ не са линейно независими.

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} =$$

при $k = 0, 1, 2, \ldots n-1$, аргументът на Γ функцията приема стойности $-n+1, -n+2, \ldots, -1, 0$. За тези стойности Γ има полюс, т.е.

$$\frac{1}{\Gamma(k-n+1)} = 0, \quad \text{при } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Редът всъщност започва от $k = n$. Сменяме сумационния индекс $k = n + l$, $l = 0, 1, 2, \ldots$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+l}}{\Gamma(n+l+1)\,\Gamma(n+l-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2l-n} =$$

$$= (-1)^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{\Gamma(l+1)\Gamma(l+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l+n} = (-1)^n J_n(x)$$

т.е.

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \qquad (4.76)$$

За да опишем общото решение на уравнението на Бесел ние се нуждаем от двойка линейно независими решения. Когато ν не е цяло: $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ са такива. Когато ν е цяло число това не може да се използва и второ линейно независимо решение се търси по друг начин. Полагаме:

$$N_\nu(x) = \frac{1}{\sin \nu\pi}\left(J_\nu(x).\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)\right).$$

при $\nu \notin \mathbb{Z}$, знаменателят е отличен от нула, $N_\nu(x)$ е линейна комбинация от две решения и е решение. Очевидно, в този случай, ($\nu \notin \mathbb{Z}$), J_ν и N_ν са двойка линейно независими решения. При $\nu \to n$, $J_\nu(x) \to J_n(x)$, $N_\nu(x)$ има граница $N_\nu(x) \to N_n(x)$, $\nu \to n$ като $J_n(x)$ и $N_n(x)$ продължават да бъдат линейно независими решения:

$$N_n(x) = \lim_{\nu\to n} \frac{1}{\sin\nu\pi}\left(J_\nu(x).\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)\right)$$

при $\nu = n$ числителят и знаменателят едновременно се анулират. Пресмятаме границата по Лопитал

$$N_n(x) = \lim_{\nu\to n} \frac{1}{\pi\cos\nu\pi}\left[\frac{\partial}{\partial\nu}\left(J_\nu(x)\right).\cos\nu\pi - J_\nu(x)\sin\nu\pi.\pi - \frac{\partial}{\partial\nu}J_{-\nu}(x)\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi \cdot (-1)^n} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(x) \cdot (-1)^n - \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(x) \right] \Big|_{\nu = n}$$

$$\Rightarrow \quad N_n(x) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(x) - (-1)^n \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(x) \right] \Big|_{\nu = n} \qquad (4.77)$$

При цяло $\nu = n$, $J_n(x)$ и $N_n(x)$ са двойка линейно независими решения на уравнението на Бесел. В задачите които ще разглеждаме ν винаги е цяло число. Разглежданията на $J_\nu(x)$ при произволно ν е необходимо, за да дефинираме чрез $J_\nu(x)$ функцията $N_n(x)$ чрез граничен преход $\nu \to n$.

<u>Терминология</u>: функцията $N_n(x)$ се нарича "функция на Нойман от ред n"

<u>Асимптотично поведение</u>

1. При малки x: Разглеждаме първите членове

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 \approx 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \approx \left(\frac{x}{2}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n+1)}$$

$$\left| \begin{aligned} & J_0(x) \approx 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \\ & J_n(x) \approx \frac{x^n}{2^n n!} = \left(\frac{x}{2}\right)^n \Gamma(n+1)^{-1} \; ; \; n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \right. \qquad (4.78)$$

За функцията на Нойман получаваме

$$\left| \begin{aligned} & N_0(x) \approx \frac{2}{\pi} \ln \frac{x}{2} - \frac{2}{\pi} \\ & N_n(x) \approx -\left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \frac{(n-1)!}{\pi} = -\left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \frac{\Gamma(n)}{\pi} \; ; \; n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \right. \qquad (4.79)$$

Трябва да пресметнем първите членове в развитието на $N_n(x)$. Последователно пресмятаме:

$$\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(x) = \frac{\partial}{\partial \nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-(-1)^k \Gamma'(k+\nu+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left[\ln\frac{x}{2} - \frac{\Gamma'(k+\nu+1)}{\Gamma(k+\nu+1)} \right] \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(x) \Big|_{\nu=n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+n+1)} \left[\ln\frac{x}{2} - \frac{\Gamma'(k+n+1)}{\Gamma(k+n+1)} \right] \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

Аналогично получаваме

$$\frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(x) \Big|_{\nu=n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-n+1)} \left[-\ln\frac{x}{2} + \frac{\Gamma'(k-n+1)}{\Gamma(k-n+1)} \right] \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}$$

$$\Rightarrow N_n(x) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(x) + (-1)^n \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(x) \right]_{\nu=n} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[J_n(x) - (-1)^n J_{-n}(x) \right] \cdot \ln\frac{x}{2} -$$

$$- \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma'(k+n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+n+1)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n} \Gamma'(k-n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-n+1)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} \quad (4.80)$$

Това е развитието в ред на функцията на Нойман. Разглеждаме първите членове. От теорията на Γ-функцията е известно, че

$$\frac{\Gamma'(-n+1)}{\Gamma(-n+1)^2} = (-1)^n \Gamma(n) \neq 0$$

При $n = 0$ първите членове в сумите (4.80) са константите $-\frac{1}{\pi} \cdot 1$ и получаваме

$$N_0(x) \approx \frac{2}{\pi} J_0(x) \ln(x) - \frac{2}{\pi} \approx \frac{2}{\pi} \left(1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2\right) \cdot \ln\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} =$$

$$= -\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \ln\frac{x}{2}$$

При $n=1,2$ определящата особеност е първия член в последната сума на (4.80)

$$N_n(x) \approx -\frac{1}{\pi}\frac{(-1)^n}{\Gamma(1)}\cdot(-1)^n\,\Gamma(n)\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{-n} = -\frac{1}{\pi}\Gamma(n)\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}.$$

Получените асимптотики при малки x показват, че $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ са линейно независими.

2. При големи x функциите $J_n(x)$ и $N_n(x)$ имат следното асимптотично поведение

$$\begin{cases} J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right) \\ N_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right) \end{cases} \qquad (4.81)$$

Т.е. функциите $J_n(x)$, $N_x(x)$ се държат като функциите cos и sin от един и същ аргумент, но с намаляваща амплитуда.

Доказателство

В уравнението на Бесел: $x^2R''(x) + xR'(x) + (x^2-\nu^2)R(x) = 0$ полагаме $R(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}V(x)$ $\Rightarrow$ получаваме уравнение за $V(x)$:

$$R'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}V(x) + x^{-\frac{1}{2}}V'(x)$$

$$R''(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}V(x) - x^{-\frac{3}{2}}V'(x) + x^{-\frac{1}{2}}V''(x)$$

заместваме и получаваме

$$\Rightarrow V''(x) + \left(1 + \frac{1-4\nu^2}{4x^2}\right)V(x) = 0 . \qquad (4.82)$$

Това е обикновено диференциално уравнение от вида

$$V''(x) + (1+\rho(x))V(x), \quad \rho(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right) \qquad (4.83)$$

Решенията на това уравнение имат асимптотика при $x\to\infty$:

$$V(x) = \gamma_\infty \sin(x+\delta_\infty) + O\left(\frac{1}{x}\right). \qquad (4.84)$$

Където γ_∞ и δ_∞ са подходящи константи. Нека $V(x)$ е решение на (4.82). Двойката функции $V(x)$ и $V'(x)$ имат представяне

$$\begin{aligned} V(x) &= \gamma(x) \sin(x+\delta(x)) \\ V'(x) &= \gamma(x) \cos(x+\delta(x)) \end{aligned} \qquad (4.85)$$

като $\gamma(x) \neq 0$. Ако за някое $x_0 : \gamma(x_0) = 0$ тогава $V(x_0) = V'(x_0) = 0$ и $V(x)$ ще бъде тривиалното нулево решение. Пресметане от (4.83):

$$\underline{\gamma(x)\cos(x+\delta(x))} = V'(x) = (\gamma(x)\sin(x+\delta(x)))' =$$
$$= \gamma' \sin(x+\delta) + \gamma\cos(x+\delta).(1+\delta') =$$
$$= \gamma' \sin(x+\delta) + \underline{\gamma\cos(x+\delta)} + \gamma.\delta'\cos(x+\delta)$$
$$\Rightarrow \underline{\gamma'.\sin(x+\delta)} + \underline{\gamma\delta'\cos(x+\delta) = 0}$$

$$V'' = (\gamma(x)\cos(x+\delta(x)))' =$$
$$= \gamma'\cos(x+\delta) - \gamma.\sin(x+\delta(x)).(1+\delta')$$

и замествайки в (4.83)

$$\gamma'\cos(x+\delta) - \gamma.(1+\delta').\sin(x+\delta) = -(1+\rho(x)).\gamma.\sin(x+\delta)$$
$$\gamma'\cos(x+\delta) - \gamma\cancel{\sin(x+\delta)} - \gamma.\delta'\sin(x+\delta) = -\gamma\cancel{\sin(x+\delta)} - \gamma.\rho(x)\sin(x+\delta)$$
$$\Rightarrow \underline{\gamma'\cos(x+\delta)} \underline{- \gamma.\delta'\sin(x+\delta) = -\gamma.\rho.\sin(x+\delta)}$$

От подчертаните равенства получаваме:

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = -\delta'\frac{\cos(x+\delta)}{\sin(x+\delta)}$$

$$\frac{\gamma'}{\gamma}\cos(x+\delta) - \delta'\sin(x+\delta) = -\rho\sin(x+\delta)$$

$$\Rightarrow -\delta'\frac{\cos^2(x+\delta)}{\sin(x+\delta)} - \delta'\sin(x+\delta) = -\rho\sin(x+\delta) \quad \Big| . \sin x$$

$$-\delta'\cos^2(x+\delta) - \delta'\sin^2(x+\delta) = -\rho\sin^2(x+\delta)$$
$$\Rightarrow \delta'(x) = \rho(x)\sin^2(x+\delta(x)) \qquad = O\left(\tfrac{1}{x^2}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{\gamma'(x)}{\gamma(x)} = -\rho(x)\cos(x+\delta)\sin(x+\delta) \quad = O\left(\tfrac{1}{x^2}\right)$$

Оттук следва, че

$$\delta(x) = \delta(a) + \int_a^x \delta'(s)\,ds$$

Поради бързото намаляване на $\delta'(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \delta(x) = \delta_\infty$ съществува и $\delta(x) = \delta_\infty + O\left(\frac{1}{x}\right)$

Аналогично

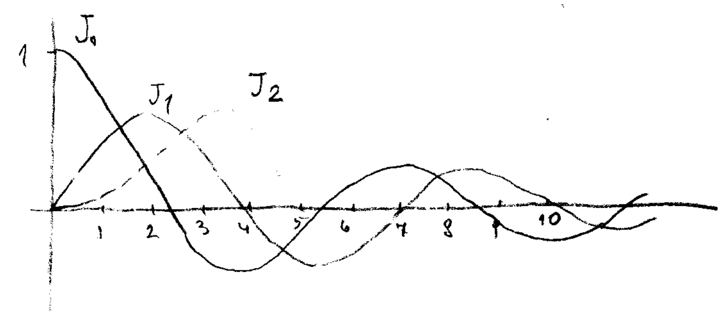
$\ln \gamma(x) = const + O\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \to +\infty$ или еквивалентно

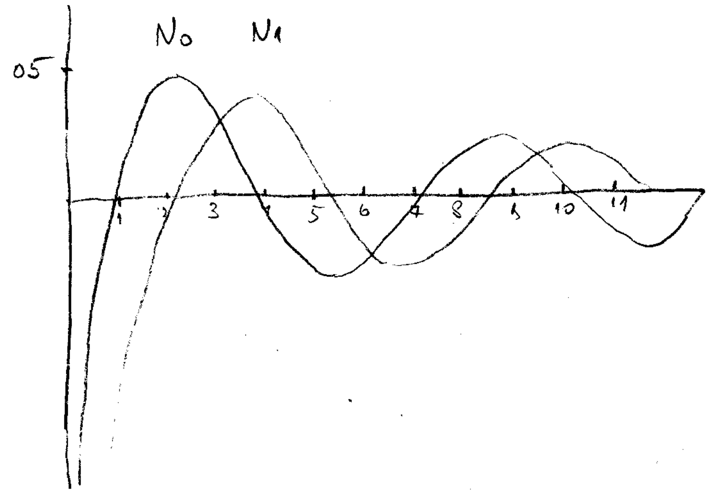
$$\gamma(x) = \gamma_\infty + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

Връщайки полагането $R(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} V(x)$ получаваме, че всяка цилиндрична функция има на $+\infty$ асимптотика $\frac{\gamma_\infty}{\sqrt{x}} \sin(x + \delta_\infty) + O\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$

Като константите за различните решения са различни. Точното уточняване води до (4.81)

Графично представяне





Примери на цилиндрични функции

$J_{n+\frac{1}{2}}(x)$ са елементарни функции. Примерно

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+1+\frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} =$$

но $\Gamma(k+1)\Gamma(k+1+\frac{1}{2}) = k!\ \frac{1}{2^{k+1}}\ 1.3.5\ldots(2k+1)\sqrt{\pi} =$

$$= \frac{1.2.4.\ldots.(2k)}{2^k} \cdot \frac{1.3.5\ldots(2k+1)}{2^{k+1}}\sqrt{\pi} = \frac{(2k+1)!}{2^{2k+1}}\sqrt{\pi}.$$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+1)!\,.\sqrt{\pi}} \cdot \frac{x^{2k+1}}{\cancel{2^{2k+1}}} \cdot \frac{2}{x} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

Цилиндричните функции са добре изучени. В справочниците се намират техните графики, табулирани стойности, изрази за техните производни и неопределени интеграли и т.н. Читателят трябва да свикне с мисълта че функциите $J_n(x)$, $N_n(x)$ са тъй добре известни, както "елементарните функции" $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x, $\ln x$ и т.н.

Връщайки се към задачата за разделяне на променливите ние трябва да изберем $\nu = n$ цяло число, защото след смяната на променливите функциите по φ трябва да са периодични с период 2π, и получаваме, че

$$(A_1 J_n(k\rho) + B_1 N_n(k\rho))(A_2 \cos n\varphi + B_2 \sin n\varphi)(A_3 e^{kz} + B_3 e^{-kz})$$

е решение на уравнението на Лаплас при произволен избор на A_i, B_i, $i = 1,2,3$ и константите на разделяне $n = 0,1,2,\ldots$ и k.

При налагане на хомогенни гранични условия ще се наложи да подбираме константата k така, че $J_n(k.a) = 0$. Това налага по-подробно да се изучат "нулите" на функциите на Бесел

<u>Нули на Беселовите функции</u>

Това са решенията на уравнението

$$J_\nu(x) = 0$$

Разглеждаме само реално ν. Доказва се, че при $\nu > -1$ всички нули на J_ν са реални и с изключение, може би, на $x = 0$ са прости

<u>Означения</u>

$J_\nu(x) = 0 \Rightarrow x_{\nu 1}, x_{\nu 2}, x_{\nu 3}, \dots$

редицата на <u>положителните</u> нули в растящ ред.

$J'_\nu(x) = 0 \Rightarrow \tilde{x}_{\nu 1}, \tilde{x}_{\nu 2}, \tilde{x}_{\nu 3}, \dots$

редицата на <u>положителните</u> нули в растящ ред.
(и в двата случая $x = 0$ се изключва)

Проста нула означава, че ако $J_\nu(x) = 0$ то $J'_\nu(x) \neq 0$
Ако допуснем че $J_\nu(x_{\nu k}) = 0 = J'_\nu(x_{\nu k})$ то тези начални условия определят тривиалното нулево решение. Точката $x = 0$ е особена. За нея примерно $J_6(0) = 0 = J'_6(0)$ и решението не е тривиално. В тази точка уравнението на Бесел не може да се реши спрямо старшата производна.

<u>Съотношения за ортогоналност</u>

Разглеждаме in първоначално интервала $[0, 1]$ и фиксираме ν-реда на функцията на Бесел: J_ν.
Чрез нулите: $J_\nu(x) = 0 \Rightarrow x = x_{\nu 1}, x_{\nu 2}, x_{\nu 3}, \dots$
образуваме една редица от функции

$$J_\nu(x_{\nu k}\cdot x)\quad, k = 1,2,3,\dots \tag{4.85}$$

Това е редица от ортогонални функции в интервала $[0,1]$ с тегло x и съотношение за ортогоналност

$$\int_0^1 J_\nu(x_{\nu k}x)\, J_\nu(x_{\nu e}x)\cdot x\,dx = \frac{1}{2}\left[J_\nu'(x_{\nu k})\right]^2 \delta_{ke}\,. \tag{4.86}$$

<u>Доказателство</u> избираме числа $\alpha \neq \beta$ и образуваме

$$\left.\begin{aligned} p(x) &= J_\nu(\alpha x) \\ q(x) &= J_\nu(\beta x) \end{aligned}\right\}$$ Тези функции удовлетворяват следните уравнения

$$-\left|\begin{aligned} &x^2p''(x) + x\,p'(x) + (\alpha^2x^2-\nu^2)p(x) = 0 \quad \cdot \tfrac{1}{x}q \\ &x^2q''(x) + x\,q'(x) + (\beta^2x - \nu)\,q(x) = 0 \quad \cdot \tfrac{1}{x}p \end{aligned}\right.$$

$$x(p''\cdot q - q''p) + p'q - q'p + (\alpha^2-\beta^2)\,x\,p\,q = 0$$

$$[x(p'q - q'p)]' + (\alpha^2-\beta^2)\,x\,p\,q = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x\,J_\nu(\alpha x)\,J_\nu(\beta x)\,dx = \frac{1}{\beta^2-\alpha^2}\int_0^1 \left(x(p'q-q'p)\right)'dx =$$

$$= \frac{1}{\beta^2-\alpha^2}\left[x\left(\alpha J_\nu'(\alpha x)\,J_\nu(\beta x) - \beta J_\nu(\alpha x)\,J_\nu'(\beta x)\right)\right]\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{\beta^2-\alpha^2}\left(\alpha J_\nu'(\alpha)\,J_\nu(\beta) - \beta J_\nu(\alpha)\,J_\nu'(\beta)\right) \tag{4.87}$$

При $\alpha = x_{\nu k}$, $\beta = x_{\nu e}$ & $k \neq e$ дясната страна е нула. Ако $\alpha = \beta = x_{\nu k}$ дясната страна е неопределена. Пресмятаме границата по Лопитал :

$$\lim_{\beta\to\alpha} \frac{1}{\beta^2-\alpha^2}\left(\alpha J_\nu'(\alpha) J_\nu(\beta) - \beta J_\nu(\alpha) J_\nu'(\beta)\right) =$$

$$= \lim_{\beta\to\alpha} \frac{1}{2\beta}\left(\alpha J_\nu'(\alpha) J_\nu'(\beta) - J_\nu(\alpha) J_\nu'(\beta) - \beta J_\nu(\alpha) J_\nu''(\beta)\right)$$

$$= \frac{1}{2\alpha}\left(\alpha (J_\nu'(\alpha))^2 - J_\nu(\alpha) J_\nu'(\alpha) - \beta J_\nu(\alpha) J_\nu''(\alpha)\right) \qquad (4.88)$$

при $\alpha = x_{\nu k} \Rightarrow J_\nu(x_{\nu k}) = 0$

$$= \frac{1}{2}\left(J'(x_{\nu k})\right)^2$$

Окончателно получихме (4.86)

→ Аналогично в интервала $[0, a]$, функциите $J_\nu\left(\frac{x_{\nu k}}{a}\rho\right)$, $k = 1, 2, \ldots$ са ортогонални с тегло x, т.е.

$$\int_0^a J_\nu\left(\frac{x_{\nu k}}{a}\rho\right) J_\nu\left(\frac{x_{\nu l}}{a}\rho\right).\rho.d\rho = \frac{a^2}{2}\left(J_\nu'(x_{\nu k})\right)^2 \delta_{kl}. \quad (4.89)$$

(4.89) се получава от (4.88) чрез смяна на променлива $x \to a\rho$. Тези функции образуват пълна система. В сила е следната

Теорема

Всяка функция $f(\rho)$, дефинирана в интервала $[0, a]$, за която $\int^a \sqrt{\rho}\,|f(\rho)|\,d\rho$ съществува се развива в ред по Бесел

$$f(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_\nu\left(\frac{x_{\nu k}}{a}\rho\right), \qquad (4.90)$$

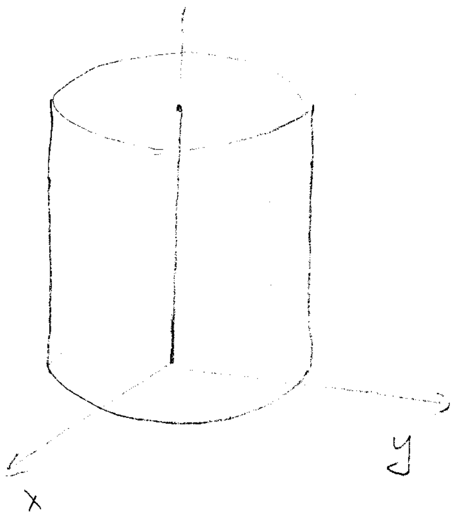
като в точките на краен скок редът е сходящ и сумата му е равна на средната стойност $\frac{1}{2}(f(\rho_0-0) + f(\rho_0+0))$. В областите, където f има втори производни, редът е равномерно сходящ.

Коефициентите в (4.90) се намират от съотношението за ортогоналност:

$$A_k \cdot \frac{a^2}{2}\left(J_\nu'(x_{\nu k})\right)^2 = \int_0^a f(x)\, J_\nu\!\left(\frac{x_{\nu k}}{a}x\right).x\,dx \quad (4.91)$$

Всички резказани до тук факти са подготвителни за следната

Примерна задача:



Уравнение

$\Delta u = 0$

Област на решимост

$0 \le \rho \le a$

$0 \le \varphi < 2\pi$

$0 \le z \le c$

Задача на Дирихле:

$u(\rho,\varphi,0) = 0 = u(a,\varphi,z)$

$u(\rho,\varphi,c) = u_s(\rho,\varphi)$.

Хомогенните гранични условия са по долната основа и околната повърхнина. Решенията с разделени променливи са от вида: $R(\rho)\Theta(\varphi)Z(z) =$

$$u = (A_1 J_n(k\rho) + B_1 N_n(k\rho))(A_2 \cos n\varphi + B_2 \sin n\varphi)(A_3 e^{kz} + B_3 e^{-kz})$$

$n = 0,1,2,\dots$, k за сега е произволно

За решението което търсим трябва $B_1 = 0$!

То дефинирано върху оста на цилиндъра, $\rho = 0$, но там $N_n(k\rho)$ е неограничено.

От $u(\rho,\varphi,0) = 0 \Rightarrow Z(0) = 0 \Rightarrow A_3 + B_3 = 0$

$\Rightarrow B_3 = -A_3 \Rightarrow A_3 e^{kz} + B_3 e^{-kz} = \frac{A_3}{2}\,\frac{e^{kz} - e^{-kz}}{2} =$

$= 2A_3\, \mathrm{sh}\, kz$.

Получаваме решения на уравнението на Лаплас
$$J_n(k\rho)(A\cos n\varphi + B\sin n\varphi)\,\mathrm{sh}\,kz.$$
Налагаме хомогенното гранично условие на околната повърхнина.
$$u(a,\rho,z) = 0 \Rightarrow J_n(k.a) = 0$$
$$k.a = x_{nm} \Rightarrow k = \frac{x_{nm}}{a},\ m = 1,2,3,\ldots$$

Търсим единственото решение, определено от граничната задача на Дирихле, като безкрайна сума: $u(\rho,\varphi,z) =$

$$= \sum_{\substack{n=0\\m=1}}^{\infty} J_n\left(\frac{x_{nm}}{a}\rho\right)(A_{nm}\cos n\varphi + B_{nm}\sin n\varphi)\,\mathrm{sh}\,\frac{x_{nm}}{a}z$$

Това е решение, което удовлетворява хомогенните гранични условия. Остава да се удовлетвори граничното условие на горната основа:
$u(\rho,\varphi,c) =$

$$= \sum_{\substack{n=0\\m=1}}^{\infty} J_n\left(\frac{x_{nm}}{a}\rho\right)(A_{nm}\cos n\varphi + B_{nm}\sin n\varphi)\,\mathrm{sh}\,\frac{x_{nm}}{a}c = U_s(\rho,\varphi). \quad (4.92)$$

Това е задача за развитие на функцията $U_s(\rho,\varphi)$ в двоен ред на Фурие-Бесел. Коефициентите A_{nm} и B_{nm} намираме, използвайки съотношението за ортогоналност: За да намерим A_{kl} умножаваме с $J_k\left(\frac{x_{kl}}{a}\rho\right).\cos k\varphi.\rho$ и интегрираме

$$\int_0^a\int_0^{2\pi} U_s(\rho,\varphi)\, J_k\left(\frac{x_{kl}}{a}\rho\right)\cos k\varphi.\rho\, d\rho =$$

$$= \sum_{n,m}\int_0^a\int_0^{\varphi} J_n\left(\frac{x_{nm}}{a}\rho\right)(A_{nm}\cos n\varphi + B_{nm}\sin n\varphi).\,\mathrm{sh}\,\frac{x_{nm}}{a}c\,.$$

$$.J_k\left(\frac{x_{kl}}{a}\rho\right).\cos k\varphi.\rho\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= \sum_{n,m} A_{nm} \int_0^a J_n\left(\frac{x_{nm}}{a}\rho\right) \cdot J_k\left(\frac{x_{kl}}{a}\rho\right) \cdot \rho \cdot d\rho \cdot sh\frac{x_{nm}}{a}c \cdot \pi \cdot \delta_{nk} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} A_{km} \cdot sh\frac{x_{km}}{a}c \cdot \pi \cdot \int_0^a J_k\left(\frac{x_{km}}{a}\rho\right) J_k\left(\frac{x_{kl}}{a}\rho\right) \cdot \rho \cdot d\rho =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} A_{km} \cdot sh\frac{x_{km}}{a}c \cdot \pi \cdot \frac{a^2}{2}\left(J_k'(x_{kl})\right)^2 \delta_{ml} =$$

$$= A_{kl}\ sh\frac{x_{kl}}{a}c \cdot \pi \cdot \frac{a^2}{2}\left(J_k'(x_{kl})\right)^2$$

$$\Rightarrow A_{kl} = \frac{2}{\pi a^2 \cdot sh\frac{x_{kl}}{a}c \cdot (J_k'(x_{kl}))^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} u_s(\rho,\varphi) J_k\left(\frac{x_{kl}}{a}\rho\right) \cos k\varphi \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi$$

аналогично

$$B_{kl} = \frac{2}{\pi a^2 sh\frac{x_{kl}}{a}c \cdot (J_k'(x_{kl}))^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} u_s(\rho,\varphi) J_k\left(\frac{x_{kl}}{a}\rho\right) \sin k\varphi \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi$$

(x_{kl} са прости нули и винаги $J_k'(x_{kl}) \neq 0$!).
Тези коефициенти, заместени в реда (4.92) определят търсеното решение на задачата на Дирихле

Справка

$$\int_0^{2\pi} \sin k\varphi \cdot \sin l\varphi \cdot d\varphi = \pi \delta_{kl}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos k\varphi \cdot \cos l\varphi \cdot d\varphi = \pi \delta_{kl}, \quad k,l = 0,1,2\ldots,$$

с изключение на $(k,l) = (0,0)$ когато

$\int_0^{2\pi} \cos 0\varphi \cdot \cos 0\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} 1 \cdot d\varphi = 2\pi$. затова само за A_{0l} имаме.

$$A_{0l} = \frac{1}{\pi a^2 sh\frac{x_{0l}}{a}c \cdot (J_0'(x_{0l}))^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} u_s(\rho,\varphi) J_0\left(\frac{x_{0l}}{a}\rho\right) \cdot 1 \cdot \rho\, d\rho\, d\varphi$$

По нататък няма да правим тези уточнения

Задача на Нойман за цилиндър

Уравнение $\Delta u = 0$

Област на решимост: $0 \leq \rho \leq a,\ 0 \leq \varphi < 2\pi,\ 0 \leq z \leq c$

Гранични условия:

$$-\frac{\partial}{\partial z}u(\rho,\varphi,0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial \rho}(a,\varphi,z) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(\rho,\varphi,c) = V_s(\rho,\varphi) \quad \text{като е изпълнено}$$

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} V_s(\rho,\varphi).\rho.\,d\rho\, d\varphi = 0 \ . \qquad (4.93)$$

Това е условието (4.4). Отново за решения с разделени променливи имаме : $u = R(\rho)\Theta(\varphi)Z(z) =$
$= (A_1 J_n(k\rho) + B_1 N_n(k\rho))(A_2 \cos n\varphi + B_2 \sin n\varphi)(A_3 e^{kz} + B_3 e^{-kz})$.
Отново $B_1 = 0$ за да бъде дефинирано решението при $\rho = 0$.

$$\frac{\partial u}{\partial z}(\rho,\varphi,0) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dz}Z(0) = 0 \Rightarrow A_3 - B_3 = 0 \Rightarrow B_3 = A_3$$

$$\Rightarrow Z(z) = A_3(e^{kz} + e^{-kz}) = 2A_3\frac{e^{kz} + e^{-kz}}{2} = 2A_3 \operatorname{ch} kz .$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}(\rho,\varphi,a) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \rho} J_n(k\rho)\Big|_{\rho=a} = 0 \Rightarrow k J_n'(ka) = 0$$

$$\Rightarrow ka = \tilde{x}_{nm} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\tilde{x}_{nm}}{a} \ , \ m = 1,2,3\dots$$

($\tilde{x}_{nm}$ съгласно направените уговорки означават нулите на производната на функциите на Бесел)
Случаят $k = 0$ се изключва защото
$J_n(0) = 0$, $n = 1,2,\dots$ Единственото изключение е $J_0(0) = 1$ но тогава съответното решение е $J_0(0).(A\cos.0 + B\sin.0)\operatorname{ch}0 = \text{const}$, а това е произволът с който се определяше решението при задачата на Нойман.
Търсим решението в ред

$$u(\rho,\varphi,z) = \sum_{\substack{n=0\\m=1}} J_n\left(\frac{\tilde{x}_{nm}}{a}\rho\right)(A_{nm}\cos n\varphi + B_{nm}\sin n\varphi)\operatorname{ch}\frac{\tilde{x}_{nm}}{a}z .$$

Коефициентите A_{nm}, B_{nm} трябва да бъдат определени

Случаят $k = 0$ изисква $Z(z) = A_3 z + B$ но или се получава $Z = \text{const}$

така, че да бъде изчистено нехомогенното гранично условие върху горната основа.

$$\frac{\partial}{\partial z} u(\rho, \varphi, c) = \sum_{\substack{n=0 \\ m=1}}^{\infty} J_n\left(\frac{\tilde{x}_{nm}}{a}\rho\right)\left(A_{nm}\cos n\varphi + B_{nm}\sin n\varphi\right)\frac{\tilde{x}_{nm}}{a}\, sh\, \frac{\tilde{x}_{nm}}{a} c = \tag{4.94}$$

$$= V_s(\rho, \varphi)$$

Това е задача за развитие в ред. Тук възникват нови пълни системи от ортогонални функции в интервала $[0, a]$.

При $\nu > 0$ редицата от функции

$$J_\nu\left(\frac{\tilde{x}_{\nu m}}{a}\rho\right), \quad m = 1, 2, 3, \dots \tag{4.95}$$

е пълна и ортогонална, със тегло ρ и съотношение за ортогоналност

$$\int_0^a J_\nu\left(\frac{\tilde{x}_{\nu k}}{a}\rho\right) J_\nu\left(\frac{\tilde{x}_{\nu \ell}}{a}\rho\right).\rho\, d\rho = -\frac{a^2}{2} J_\nu(\tilde{x}_{\nu k})\, J''_\nu(\tilde{x}_{\nu k})\,\delta_{k\ell} \tag{4.96}$$

Коментар

1. От графиките на $J_\nu(x)$ се вижда че при $\nu > 1$, $J'_\nu(0) = 0$, и $x_{\nu 0} = 0$ е корен, но тогава $J_\nu\left(\frac{x_{\nu 0}}{a}\rho\right) = 0$ и поради това не се включва в (4.95)
2. Дясната част на (4.95) е положителна. $\tilde{x}_{\nu k}$ е локален екстремум на J_ν. Ако е максимум тогава $J_\nu(\tilde{x}_{\nu k}) > 0$ & $J''_\nu(\tilde{x}_{\nu k}) < 0$, при минимум $J_\nu(\tilde{x}_{\nu k}) < 0$ & $J''_\nu(\tilde{x}_{\nu k}) > 0$.

→ При $\nu = 0$ редицата от функции:

$$J_0(0) = 1, \quad J_0\left(\frac{\tilde{x}_{0m}}{a}\rho\right), \quad m = 1, 2, \dots \tag{4.97}$$

е пълна и ортогонална с тегло ρ и съотношение за ортогоналност, $(\tilde{x}_{00} = 0)$

$$\int_0^a J_0\left(\frac{\tilde{x}_{0k}}{a}\rho\right) J_0\left(\frac{\tilde{x}_{0l}}{a}\rho\right).\rho\, d\rho = -\frac{a^2}{2} J_0(\tilde{x}_{0k}) J_0''(\tilde{x}_{0l})\,\delta_{kl}$$

при $(k, l) \neq (0, 0)$. Като само за случая $(k, l) = (0, 0)$ очевидно имаме

$$\int_0^a J_0\left(\frac{x_{00}}{a}\rho\right)^2 \rho\, d\rho = \int_0^a \rho\, d\rho = \frac{a^2}{2}$$

докато дясната част е $-\frac{a^2}{2} J_0(0) . J_0''(0) =$
$= -\frac{a^2}{2} . 1 . (-\frac{1}{2}) = \frac{a^2}{4}$

Случаят е напълно аналогичен със системата функции $\cos\frac{n\pi}{a}\rho$ в $[0, a]$ като

$$\int_0^a \cos\frac{k\pi}{a}\rho \cos\frac{l\pi}{a}\rho \,.\, d\rho = \frac{a}{2}\delta_{kl}$$, $(k, l) \neq (0, 0)$, докато

$$\int_0^a \cos 0 . \cos 0 . d\rho = \int_0^a 1 . d\rho = a$$

Всяка частично гладка функция в интервала $[0, a]$ може да се развие по двете системи (4.95), (4.97) и условието (4.94) е задача за развитие в двоен ред по тези системи от ортогонални функции. Коефициентите се намират като се използват съотношенията за ортогоналност. Крайният резултат е.

$$B_{kl} = \frac{-a . 2}{\tilde{x}_{kl} . sh\frac{\tilde{x}_{kl}}{a}c . \pi . a^2 J_k(\tilde{x}_{kl}) J_k''(\tilde{x}_{kl})} \int_0^a\int_0^{2\pi} V_s(\rho,\varphi) J_k\left(\frac{\tilde{x}_{kl}}{a}\rho\right) \sin k\varphi . \rho\, d\rho\, d\varphi .$$

$$A_{kl} = \frac{-a . 2}{\tilde{x}_{kl} . sh\frac{\tilde{x}_{kl}}{a}c . \pi . a^2 J_k(\tilde{x}_{kl}) J_k'(\tilde{x}_{kl})} \int_0^a\int_0^{2\pi} V_s(\rho,\varphi) J_k\left(\frac{\tilde{x}_{kl}}{a}\rho\right) \cos k\varphi . \rho . d\rho\, d\varphi$$

$k = 1, 2, 3 \ldots, \quad l = 1, 2, \ldots$

$$A_{0l} = \frac{-a\cdot 2}{\tilde{x}_{0l}\, \mathrm{sh}\frac{\tilde{x}_{0l}}{a}c \cdot 2\pi\cdot a^2 J_0(x_{0l})\, J_0''(x_{0l})} \int_0^a\int_0^{2\pi} V_s(\rho,\varphi)\, J_0\!\left(\frac{x_{0l}}{a}\rho\right)\cdot 1\cdot \rho\, d\rho\, d\varphi,$$

$l = 1,2,3\ldots$

Коментар. В задачата на Нойман може да се проследи какво означава условието (4.93). В развитието (4.94) поради множителя $\tilde{x}_{nm}$ липсва един елемент от пълната система функции, съответствуващ на $(n,m) = (0,0)$

$J_0(0).\cos 0 = 1$. За всички останали елементи е в сила:

$$\int_0^a\int_0^{2\pi} J_n\!\left(\frac{\tilde{x}_{nm}}{a}\rho\right)\cos n\varphi\,.\,\rho\, d\rho\, d\varphi = 0,\quad \int_0^a\int_0^{2\pi} J_n\!\left(\frac{\tilde{x}_{nm}}{a}\rho\right)\sin n\varphi\,.\,\rho\, d\rho\, d\varphi = 0$$

и същото трябва да бъде изпълнено и за $V_s(\rho,\varphi)$ (4.93). Това, в случая, е условието за развитие в ред по пълна система функции от които е изваден една.

Различни типове цилиндрични функции

До тук разгледахме граничните задачи за цилиндър като нехомогенното условие е върху горната основа. Това съответствува на избор на знаците на константите на разделяне, при което решението по променливите ρ и φ е осцилиращо, а по z монотонно. Ако искаме нехомогенните гранични условия да са по околната повърхнина, трябва друг избор на константите на разделяне.

По дефиниция, цилиндрична функция $R(x)$ е всяко решение на уравнението:

$$x^2 R''(x) + x R'(x) + (x^2 - \nu^2) R(x) = 0.$$

Тогава функцията $f(\rho) = R(\overset{\alpha}{k}\rho)$ удовлетворява

$$\rho^2 f''(\rho) + \rho f'(\rho) + (\alpha^2\rho^2 - \nu^2) f(\rho) = 0$$

В частност ако $\alpha = i$ получаваме, че $J_\nu(ix)$ е решение на уравнението

$$x^2 R''(x) + x R'(x) + (-x^2 - \nu^2) R(x) = 0 . \qquad (4.98)$$

То съответствува на друг избор на знаците на константите на разделяне

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)\frac{1}{R} + \frac{1}{\rho^2}\underbrace{\frac{d^2\Theta}{d\varphi^2}\cdot\frac{1}{\Theta}}_{-n^2} + \underbrace{\frac{d^2 Z}{dz^2}\,\frac{1}{Z^2}}_{-k^2} = 0$$

(при полагане $x = k\rho$). Това съответствува на решения осцилиращо по z и φ и монотонно по ρ.

$$J_n(ix) = \left(\frac{ix}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+n+1)}\left(\frac{ix}{2}\right)^{2k} =$$

$$= i^n \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

За да бъде реалнозначна функция се избира

$$I_n(x) = (i)^{-n} \cdot J_n(ix) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

което е решение на (4.98)

Терминология: функциите

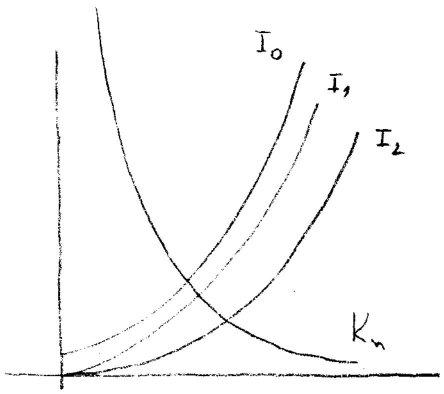
$$\left|\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(x) &= J_\nu(x) + i N_\nu(x) \\ H_\nu^{(2)}(x) &= J_\nu(x) - i N_\nu(x) \end{aligned}\right.$$

се наричат функции на Бесел от III род или функции на Ханкел.

функцията

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}(i)^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(ix)$$

е реалнозначна за реални x и е второ, линейно независимо решение на (4.98).
Функциите $I_\nu(x)$, $K_\nu(x)$ са двойка линейно независими решения на (4.98) и се наричат "<u>Модифицирани функции на Бесел</u>"
Те са монотонни и графиките им са следните



при $x \to 0$: $I_n(x) \to const$
$K_n(x) \to +\infty$

при $x \to +\infty$ $I_n(x) \to +\infty$
$K_n(x) \to 0$

Решението с разделени променливи е

$$(A_1 I_n(k\rho) + B_1 K_n(k\rho))(A_2 \cos n\varphi + B_2 \sin n\varphi)(A_3 \cos kz + B_3 \sin kz)$$

Ако искаме решение което да е монотонно по φ и осцилиращо по ρ и z трябва замени $\nu \to i\nu$. Тогава решението с разделени променливи е

$$(A_1 J_{i\nu}(ik\rho) + B_1 J_{-i\nu}(ik\rho))(A_2 e^{\nu\varphi} + B_2 e^{-\nu\varphi})(A_3 \cos kz + B_3 \sin kz).$$

и т.н.

<u>Допълнение</u>

За функциите на Бесел са в сила следните съотношения

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n} J_n(x)\right) = -\frac{1}{x^n} J_{n+1}(x) \ ; \quad \frac{d}{dx}\left(x^n J_n(x)\right) = x^n J_{n-1}(x)$$

Доказателство

$$x^n \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n} J_n(x)\right) = x^n \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \cdot \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{x^n}{2^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} \frac{2k}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot \cancel{k}}{\cancel{k}\cdot\Gamma(k)\Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n-1} = , \quad k = l+1, \; l = 0, 1 .$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{-1 \cdot (-1)^l}{\Gamma(l+1)\Gamma(l+(n+1)+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l+(n+1)} = -\, J_{n+1}(x)$$

Интегрални представяния

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n\xi - x\sin\xi)}\, d\xi = J_n(x) \qquad (4.99)$$

или еквивалентно

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\xi - x\sin\xi)\, d\xi = J_n(x)$$

Доказателство. Полагаме $F(x) = \int_0^{2\pi} e^{i(n\xi - x\sin\xi)} d\xi$. Това е добре дефинирана функция. $F(x)$ е решение на уравнението на Бесел. Изчисляваме

$$x^2 F''(x) + x F'(x) + (x^2 - n^2) F(x) =$$

$$= \int_0^{\infty} [-x^2 \sin^2\xi - i x \sin\xi + x^2 - n^2)\, e^{i(n\xi - x\sin\xi)}\, d\xi =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{d}{d\xi}\left[i(x\cos\xi + n) \cdot e^{i(n\xi - x\sin\xi)} \right] d\xi =$$

$$= i(x\cos\xi + n)\, e^{i(n\xi - x\sin\xi)} \Big|_{\xi=0}^{\pi} = 0$$

$\Rightarrow F(x) = A J_n(x) + B N_n(x)$. F няма особеност $\Rightarrow B = 0$

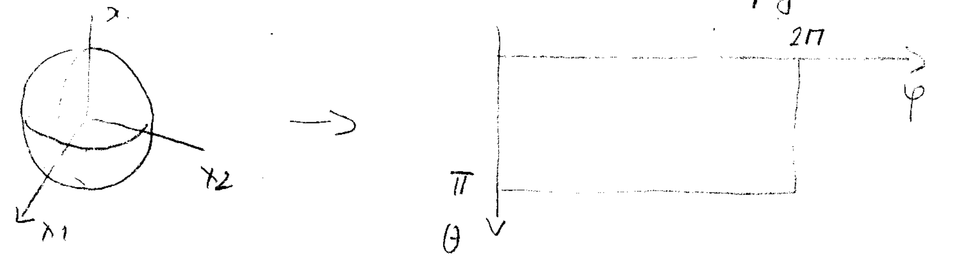
$\Rightarrow F(x) = A J_n(x)$. По нататък сравняването на асимптотиките при $x \to 0$ показва, че $A = 1$

Разделяне на променливите за оператора на Лаплас в сферични координати. Сферични функции.

Сферичните координати:

$$\begin{cases} x_1 = r\sin\theta\cos\varphi & 0 \le r < \infty \\ x_2 = r\sin\theta\sin\varphi & 0 \le \theta \le \pi \\ x_3 = r\cos\theta & 0 \le \varphi < 2\pi \end{cases} \qquad (4.100)$$

са друг пример на локално ортогонални координати. Скаларните функции в $\mathbb{R}^3$ се превръщат във функции на $(r,\theta,\varphi) \to u(r,\theta,\varphi)$. При $r = 1$, (θ,φ) параметризират единичната сфера, но не са глобални координати.



(4.101)

Те изобразяват почти цялата повърхност на S^2 в правоъгълник. (4.101). Ако $f(x_1,x_2,x_3)$ е функция в $\mathbb{R}^3$, рестрикцията ѝ върху S^2 я превръща във функция на θ,φ

$f(\theta,\varphi) = f(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$. Но не всяка (гладка) функция дефинирана в правоъгълника $\theta\in[0,\pi]$, $\varphi\in[0,2\pi]$ се получава като рестрикция на функция в $\mathbb{R}^3$ върху S^2. Необходимо е по φ да е периодична с период 2π и при $\theta = 0$ или π да не зависи от φ. Това е от значение, когато търсим решения на уравнението на Лаплас в цялото пространство. В сферични координати уравнението на Лаплас има вида: $\Delta u(r,\theta,\varphi) =$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0. \quad (4.102)$$

Търсим решения (в цялото $\mathbb{R}^3$) с разделени променливи: $u(r,\theta,\varphi) = R(r)\,P(\theta)\,Q(\varphi)$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)\frac{1}{R}}_{K} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)\frac{1}{P} + \frac{1}{\sin^2\theta}\underbrace{\frac{d^2Q}{d\varphi^2}\frac{1}{Q}}_{-m^2} = 0$$

Избираме "$-m^2$" защото решението трябва да е периодично по φ (за да се продължи до $\mathbb{R}^3$).

$\Rightarrow Q''(\varphi) = -m^2 Q(\varphi) \rightarrow$ общо решение $A\cos m\varphi + B\sin m\varphi$

$\Rightarrow r^2R'' + 2rR' = KR$ — "радиалното уравнение".

То има две линейно независими решения от вида r^ℓ, заместваме:

$\ell(\ell-1)r^\ell + 2\ell r^\ell = Kr^\ell \Rightarrow \ell(\ell+1) = K$

Очевидно ако ℓ е корен $\rightarrow -\ell-1$ също е корен

не ~~Най-много един от корените може да~~ бъде ~~положителен.~~ Ако $R(r) = r^\ell$, това означава, че $u(r,\theta,\varphi)$ е хомогенна функция от степен ℓ. Искаме решението да е дефинирано в цялото пространство $\Rightarrow$ трябва $\ell \geq 0$. Тогава $K \geq 0$ и неотрицателния корен означаваме с ℓ.

Но $u(r,\theta,\varphi) = r^\ell P(\theta)Q(\varphi)$ е хармонична хомогенна функция в цялото пространство. Съгласно доказана теорема тя е хомогенен хармоничен полином и неговата степен ℓ е цяло число: $\ell = 0,1,2,\ldots$ и константата на разделяне K има вида $K = \ell(\ell+1)$, $\ell = 0,1,2,\ldots$.

При зададено ℓ, решенията с разделени променливи са $2l+1$ мерното пространство на хармоничните хомогенни полиноми от степен l. Тяхната рестрикция върху единичната сфера S^2 определят функциите $P(\theta)Q(\varphi)$. Можем да намерим явния им вид ползвайки уравненията които удовлетворяват. За $P(\theta)$ получаваме

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\cdot\frac{dP}{d\theta}\right)+\left(l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)P=0. \quad (4.103)$$

полагаме $\cos\theta = z$, $z\in[-1,1]$

$$\left.\begin{aligned}\frac{dP}{d\theta} &= \frac{dP}{dz}\frac{dz}{d\theta} = -\frac{dP}{dz}\sin\theta\\ \frac{d^2P}{d\theta^2} &= \frac{d^2P}{dz^2}\sin^2\theta - \frac{dP}{dz}\cos\theta\end{aligned}\right\}\text{ заместваме в (4.103).}$$

$$P''(\theta)+P'(\theta)\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\left(l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)P(\theta)=0$$

$$P''(z)\sin^2\theta-P'(z)\cos\theta-P'(z)\frac{\cos\theta}{\cancel{\sin\theta}}\cancel{\sin\theta}+\left(l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)P(z)=0$$

$$(1-z^2)P''(z)-2zP'(z)+\left(l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)P(z)=0.$$

$$\left((1-z^2)P'(z)\right)'+\left(l(l+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right)P(z)=0 \quad (4.104)$$

При $m=0$, уравнението за $P(z)$ е

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\frac{dP}{dz}\right]+l(l+1)P=0 \quad (4.105)$$

<u>Терминология</u>: Уравнението (4.105) се нарича "Уравнение на Лежандър" а (4.104) "Модифицирано уравнение на Лежандър"

<u>Лема</u>: При $l=0,1,2\ldots$ решение на (4.105) е полином (полином на Лежандър)

$$P_\ell(z) = \frac{1}{2^\ell . \ell!} \frac{d^\ell}{dz^\ell} (z^2-1)^\ell . \qquad (4.106)$$

Първи примери:

$P_0(z) = 1$

$P_1(z) = z$

$P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2-1)$

$P_3(z) = \frac{1}{2}(5z^3-3z)$

$P_4(z) = \frac{1}{8}(35z^4-30z^2+3)$

$\vdots$

$P_\ell(z)$ е полином от степен ℓ като при ℓ четно $\to P_\ell(z)$ е четен, ℓ нечетно $\to P_\ell$ е нечетен

Доказателство на лемата

Полагаме $\quad W_\ell = (z^2-1)^\ell \quad$ и диференцираме

$W_\ell^{(1)} = \ell . 2z . W_{\ell-1}$

$\Rightarrow \quad (z^2-1) W_\ell^{(1)} = \ell . 2z . W_\ell \qquad$ диференцираме $\ell+1$ пъти

$\left((z^2-1) W_\ell^{(1)}\right)^{(\ell+1)} = \left(\ell . 2z . W_\ell\right)^{(\ell+1)}$

$$(z^2-1)W_\ell^{(\ell+2)} + (\ell+1).2z.W_\ell^{(\ell+1)} + (\ell+1).\ell W_\ell^{(\ell)} = 2\ell z W_\ell^{(\ell+1)} + 2\ell.(\ell+1) W_\ell^{(\ell)}$$

$$(z^2-1)\left(W_\ell^{(\ell)}\right)'' + 2z\left(W_\ell^{(\ell)}\right)' = \ell(\ell+1)\, W_\ell^{(\ell)}$$

Т.е. (4.106) е решение на уравнението на Лежандър. Съществува и второ линейно независимо решение $Q(z)$. За нас то не е интересно защото не поражда функция дефинирана в R^3. За улеснението $Q(z)$ е неограничено в краищата на интервала $[-1, +1]$. За да се убедим в това разглеждаме детерминантата

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} P_\ell(z) & Q(z) \\ P_\ell'(z) & Q'(z) \end{vmatrix} = P_\ell(z)\, Q'(z) - Q(z)\, P_\ell'(z)$$

Ако P_ℓ и Q_ℓ са двойка линейно независими решения на уравнението $a(z) f''(z) + b(z) f'(z) + c(z) f(z) = 0$

то $\frac{d\Delta}{dz} = -\frac{b(z)}{a(z)}$

В нашия случай : $(1-z^2) P''(z) - 2z P'(z) + l(l+1) P(z) = 0$

$a = (1-z^2)$, $b = -2z$ и

$$\frac{d}{dz}\Delta = \frac{2z}{1-z^2} = -\frac{d}{dz} \ln(1-z^2) = \frac{d}{dz} \ln \frac{1}{1-z^2}$$

$$\Rightarrow \Delta(z) = \ln \frac{const}{1-z^2} = \ln \frac{c_0}{1-z^2}$$

Ако решенията са линейно независими $\rightarrow c_0 \neq 0$

$P_l(z)$ е ограничено в краищата: $P_l(1) = 1$, $P_l(-1) = (-1)^l$.

тогава задължително $Q(z)$ трябва да има особеност при $z = \pm 1$.

Изчисляване на $P_l(1)$

$$\frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dz^l} (z^2-1)^l \Big|_{z=1} = \frac{1}{2^l . l!} \frac{d^l}{dz^l} \left[(z-1)(z+1) \right]^l \Big|_{z=1} =$$

$$= \frac{1}{2^l . l!} \left(\frac{d^l}{dz^l} (z-1)^l \right) (z+1)^l \Big|_{z=1} + \underbrace{\frac{1}{2^l l!} \cdot l \frac{d^{l-1}}{dz^{l-1}} (z-1)^l \cdot \frac{d}{dz} (z+1)^l +}_{=0 \text{ при } z=1} =$$

защото всеки член има множител $(z-1)$.

$$= \frac{1}{2^l l!} \cdot l! \, (1+1)^l = 1 .$$

Присъединени функции на Лежандър се наричат функциите

$$P_l^m(z) = (1-z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dz^m} P_l(z) . \qquad (4.107)$$

$l = 0, 1, 2, \dots$, $m = 0, 1, 2, \dots, l$

Директна проверка показва, че те са решения на присъединеното уравнение на Лежандър (4.104)

Първи примери:

$$P_2^0(z) = P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2-1) \quad ; \quad P_2^0(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$$
$$P_2^1(z) = \sqrt{1-z^2}\,.\,3z \quad ; \quad P_2^1(\cos\theta) = 3\sin\theta.\cos\theta$$
$$P_2^2(z) = (1-z^2).\,3 \quad ; \quad P_2^2(\cos\theta) = 3\sin^2\theta$$

Тогава при зададено $l = 0,1,2,\ldots$ съществуват $2l+1$ хомогенни хармонични полиноми. Техните рестрикция върху единичната сфера S^2 се наричат общи сферични функции. Един базис от $2l+1$ полиноми, които в сферичните променливи имат вида $r^l P(\theta)\,Q(\varphi)$ се задава от

$$P_l^m(\cos\theta).\cos m\varphi \quad , m = 0,1,\ldots,l$$
$$P_l^m(\cos\theta).\sin m\varphi \quad , m = 1,2,\ldots,l$$

Пример за $l=2$.

$$P_2^0(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1) \to r^2 P_2(\cos\theta) = x_3^2 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2$$

$$P_2^1(\cos\theta).\cos\varphi = 3\sin\theta.\cos\theta.\cos\varphi \longleftrightarrow 3x_3x_1$$
$$P_2^2(\cos\theta).\cos 2\varphi = 3\sin^2\theta.\cos 2\varphi \longleftrightarrow 3(x_1^2 - x_2^2)$$
$$P_2^1(\cos\theta).\sin\varphi = 3\sin\theta.\cos\theta.\sin\varphi \longleftrightarrow 3x_3x_2$$
$$P_2^2(\cos\theta).\sin 2\varphi = 3\sin^2\theta.\sin 2\varphi \longleftrightarrow 6x_1x_2$$

По-често се използва комплексната форма

$$P_l^{|m|}\,e^{im\varphi} \quad , m = 0,\pm1,\ldots,\pm l .$$

По дефиниция

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) = \delta_m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\,\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\; P_l^{|m|}(\cos\theta)\, e^{im\varphi} \tag{4.108}$$

$$\delta_m = \begin{cases} (-1)^m & , m \geq 0 \\ 1 & m < 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{array}{l} l = 0,1,2,3,\ldots \\ m = 0,\pm1,\ldots,\pm l \end{array}$$

Първи примери:

$$\begin{cases} Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \\ Y_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta . e^{i\varphi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_{2,0} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right) \\ Y_{2,1} = -\sqrt{\frac{15}{18\pi}} \sin\theta \cos\theta \, e^{i\varphi} \\ Y_{2,2} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2\theta \, e^{i2\varphi} \end{cases}$$

$$Y_{\ell,-m} = (-1)^m Y_{\ell,m}^{*}$$ (* - комплексно спрягане)

Основен резултат. При зададено ℓ, функциите $r^\ell Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$, $m = 0, \pm 1, \dots \pm \ell$ са хомогенни хармонични (комплекснозначни) полиноми в $\mathbb{R}^3$ от степен ℓ и образуват базис в $\mathcal{H}^\ell$.
Функциите $Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)$, дефинирани върху единичната сфера S^2 образуват пълна ортонормирана система функции:

$$\iint_{S^2} Y_{\ell m}(\theta,\varphi) . Y_{\ell' m'}^{*}(\theta,\varphi) \, |dS| = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \qquad (4.109)$$

или

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_{\ell m}(\theta,\varphi) Y_{\ell' m'}^{*}(\theta,\varphi) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \qquad (4.109)$$

Всяка частичногладка функция $f(\theta,\varphi)$, дефинирана върху S^2 се развива в ред по сферични функции

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} A_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$$

(4.68)

където

$$A_{lm} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta,\varphi)\, Y^*_{lm}(\theta,\varphi)\, \sin\theta \, d\theta\, d\varphi$$

Случай на азимутална симетрия

Сферичните функции $Y_{l,0}(\theta,\varphi)$ не зависят от φ:

$$Y_{l,0}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\, P_l(\cos\theta)$$

От съотношението за ортогоналност (4.109)

$$\frac{2l+1}{4\pi} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_l(\cos\theta)\, P_{l'}(\cos\theta)\, \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \delta_{ll'}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} P_l(\cos\theta)\, P_{l'}(\cos\theta)\, \sin\theta\, d\theta = \frac{2}{2l+1}\,\delta_{ll'} \qquad (4.110)$$

или при смяна $\cos\theta = z$

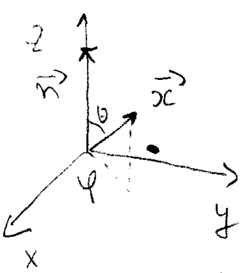
$$\int_{-1}^{1} P_l(z)\, P_{l'}(z)\, dz = \frac{2}{2l+1}\,\delta_{ll'} \qquad (4.110)$$

В интервала $[-1,1]$ полиномите на Лежандър образуват пълна ортогонална система от функции и всяка частично гладка функция $f(z)$ може да се развие в ред

$$f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(z), \quad \text{където} \quad A_l = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1} f(z) P_l(z)\, dz .$$

Пораждаща функция за полиномите на Лежандър

$$\vec{n} = (0,0,1)$$



$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\cos\theta + 1}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta)\, r^l$$

при $|r| < 1$

В околност на $\vec{0}$, $\frac{1}{|\vec{x}-\vec{n}|}$ е хармонична функция

с азимутална симетрия $\quad \Delta \frac{1}{|\vec{x}-\vec{n}|} = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{|\vec{x}-\vec{n}|} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l . P_l(\cos\theta) . r^l$$

Как да определим константите A_l? Разглеждаме частен случай $\theta = 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\cos\theta + 1}}\Bigg|_{\theta=0} = \frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots$$

$$\Rightarrow A_l P_l(1) = 1 \Rightarrow A_l . 1 = 1 \Rightarrow A_l = 1.$$

Окончателно получихме, че в сферични променливи решенията на уравнението на Лаплас с разделени променливи имат вида

$$r^l Y_{l,m}(\theta,\varphi)$$
$$\frac{1}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

$l = 0, 1, 2, \dots$, $\quad m = 0, \pm 1, \dots \pm l$ $\quad$ като първата функция е хомогенен хармоничен полином от степен l, а втората е дефинирана при $r > 0$.

<u>Примери:</u> <u>Задача на Дирихле за кълбо.</u>

Уравнение $\quad \Delta u = 0$

Област на решимост $\quad B = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < a\} \Leftrightarrow$

$0 \le r < a$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$

Гранична задача: $u(a, \theta, \varphi) = u_s(\theta, \varphi)$

Решението се търси във вида

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left(A_{lm} . r^l + B_{lm} \frac{1}{r^{l+1}}\right) Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

във съображения за непрекъснатост в центъра
$\Rightarrow B_{em} = 0$ и

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{l,m} A_{em} \cdot r^l Y_{em}(\theta,\varphi) \qquad (4.111)$$

Граничното условие

$$u(a,\theta,\varphi) = \sum_{l,m} A_{em}\, a^l\, Y_{em}(\theta,\varphi) = u_s(\theta,\varphi)$$

се превръща в задача за развиване в ред по сферични функции на $u_s(\theta,\varphi)$. Това определя константите A_{em}

$$A_{em} = \frac{1}{a^l} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} u_s(\theta,\varphi)\, Y_{em}^*(\theta,\varphi) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

Заместени в (4.111) те определят единственото решение.

<u>Задача на Нойман за кълбо:</u>
Тук има граничното условие

$$\frac{\partial}{\partial r} u(a,\theta,\varphi) = V_s(\theta,\varphi)$$

като $$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} V_s(\theta,\varphi)\, a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 0 \qquad (4.112)$$

Търсеното решение има вида

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} A_{em} \cdot r^l Y_{em}(\theta,\varphi)$$

Граничното условие

$$\left.\frac{\partial}{\partial r} u(r,\theta,\varphi)\right|_{r=a} = \sum_{l,m} A_{em} \cdot l \cdot a^{l-1} \cdot Y_{em}(\theta,\varphi) = V_s(\theta,\varphi). \qquad (4.113)$$

се превръща в задача за развитие в ред

$$\Rightarrow A_{em} = \frac{1}{l \cdot a^{l-1}} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} V_s(\theta,\varphi) \cdot Y_{em}^*(\theta,\varphi) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \qquad (4.114)$$

$l = 1, 2, 3, \ldots \quad m = 0, \pm 1, \ldots, \pm l$

A_{00} не може да се определи, $Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} = const$

Условието (4.112) в случая означава, че $V_s(\theta,\varphi)$ може да се развие в ред по пълна система от функции, от които липсва една Y_{00}.
В (4.113) множителя $l=0$ елиминира този член.

Допълнение

В сила е следното развитие на фундаменталното решение

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1}\frac{r_<^{\,l}}{r_>^{\,l+1}} Y_{lm}(\theta,\varphi)Y_{lm}^*(\theta',\varphi'). \quad (4.115)$$

$\vec{x} \to (r,\theta,\varphi)$ | $r_< = \min(r,r')$
$\vec{x}' \to (r',\theta',\varphi')$ | $r_> = \max(r,r')$

Доказателство

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r_>}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l P_l(\cos\gamma) \quad (4.116)$$

където γ е ъгъла между $\vec{x}$ и $\vec{x}'$
$P_l(\cos\gamma)$ е сферична функция от степен l
(т.е. $r^l P_l(\cos\gamma)$ е полином от степен l)

$$\Rightarrow P_l(\cos\gamma) = \sum_{m=-l}^{+l} A_{lm}(\theta',\varphi') \cdot Y_{lm}(\theta,\varphi) \quad 4.117$$

$$A_{lm}(\theta',\varphi') = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_l(\cos\gamma)\, Y_{lm}^*(\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi \quad (4.118)$$

От общата теория имаме

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} A_{lm} Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

Тъй като $Y_{lm}(0,\varphi) = 0$ при $m \neq 0$ и

$$Y_{l0}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\, P_l(\cos\theta)$$

$$\Rightarrow f(0,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} A_{l0} \cdot P_l(1)\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} = \sum_{l=0}^{\infty}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\, A_{l0}$$

Ако f_l е сферична функция от степен l $\Rightarrow$

$$f_l(0,\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\, A_{l0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \oiint_{S^2} f_l(\theta,\varphi)\, Y^*_{l0}(\theta,\varphi)\, |d\vec{s}\,|. =$$

$$= \frac{2l+1}{4\pi} \oiint_{S^2} f_l(\theta,\varphi)\, P_l(\cos\theta)\, |d\vec{s}\,|$$

т.е. ако f_l е сферична функция от степен l:

$$\frac{4\pi}{2l+1} f_l(0,\varphi) = \oiint_{S^2} f_l(\theta,\varphi)\, P_l(\cos\theta)\, |d\vec{s}\,| \qquad (4.119)$$

Връщаме се към (4.118). Завъртваме координатната система така, че оста z да съвпадне с $\vec{x}\,'$. Имаме нови ъглови променливи γ и β (γ, ъгъл м/у $\vec{x}\,'$ и $\vec{x}$ сега е полярен ъгъл за $\vec{x}\,'$). При това се извършва смяна на променливи $\theta = \theta(\gamma,\beta)$, $\varphi = \varphi(\gamma,\beta)$. Мярката на S^2 е инвариантна при въртене. (4.118) ще се запише като

$$A_{lm}(\theta',\varphi') = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_l(\cos\gamma)\, Y^*_{lm}(\theta(\gamma,\beta),\varphi(\gamma,\beta))\, \sin\gamma\, d\gamma\, d\beta =$$

използваме доказаното равенство (4.18) където
$f(\gamma,\beta) = Y^*_{lm}(\theta(\gamma,\beta),\, \varphi(\gamma,\beta))$

$$= \frac{4\pi}{2l+1} Y^*_{lm}(\theta(0,\beta),\varphi(0,\beta)) = \frac{4\pi}{2l+1} Y^*_{lm}(\theta',\varphi')$$

защото тогава $\gamma = 0$ и $\vec{x}$ и $\vec{x}\,'$ са колинеарни

Получаваме, замествайки $A_{\ell m}(\theta', \varphi')$ в (4.117)

$$P_\ell(\cos\gamma) = \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} Y_{\ell m}(\theta, \varphi)\, Y^*_{\ell m}(\theta', \varphi') \qquad (4.120)$$

Това равенство се нарича "Теорема за умножението". От (4.116) и (4.120) следва (4.115).

Допълнение

Възникващите в предишните разглеждания обикновени диференциални уравнения (Бесел, Лежандър) и техните ортогонални системи функции са частни случаи от един общ проблем, който в литературата се нарича често "Задача на Щурм-Лиувил". Накратко ще формулираме основния резултат.

Разглеждаме обикновени диференциални уравнения от вида

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) + (\lambda \rho(x) - q(x))u = 0 \qquad (4.121)$$

в интервала (a, b), като може по отделно a да е крайно или $-\infty$, b да е крайно или $+\infty$, като в интервала $k(x) > 0$, $\rho(x) > 0$, $q(x) \geq 0$. Уравнението (4.21) има вид на уравнение за собствени стойности, ако се запише във вида

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{dx}\left(k\frac{du}{dx}\right) - \frac{q}{\rho}u = \lambda u$$

Поради което λ в (4.121) се нарича собствена стойност.

Пример - Уравнението на Бесел в интервал $(0, b)$

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dR}{dx}\right) + \left(\lambda x - \frac{\nu^2}{x}\right) = 0 \quad : \quad k = x, \ \rho = x, \ q = \frac{\nu^2}{x^2}$$

Разглеждаме случая, когато $k(0) = 0$ и

$K(x) = (x-a)\,g(x), \quad g(a) \neq 0$, при $x > a$

т.е. a е нула на K от първи ред.

Нека $u_1(x)$ и $u_2(x)$ са две линейно независими решения на (4.121). Ако $u_1(x)$ е ограничено при $x \to a$, т.е. $u_1(x) \to u(a)$, тогава задължително $|u_2(x)| \to \infty$ при $x \to a$

Доказателство

Записваме уравнението (4.121) във вида

$$L(u) + f u = 0,$$

$$L(u) = \frac{d}{dx}\left(k \frac{du}{dx}\right), \quad f = \lambda \rho(x) - q(x)$$

$$-\left|\begin{array}{ll} L(u_1) + f u_1 = 0 & \cdot u_2 \\ L(u_2) + f u_2 = 0 & \cdot u_1 \end{array}\right.$$

$$u_2 L(u_1) - u_1 L(u_2) = 0$$

$$= u_2 (k \cdot u_1')' - u_1 (k \cdot u_2')' = 0 \Rightarrow (k(u_2 u_1' - u_1 u_2'))' = 0$$

$$= u_1 u_2' - u_2 u_1' = \frac{c}{kx} \Rightarrow \frac{u_2'}{u_1} - u_2 \frac{u_1'}{u_1^2} = \frac{c}{k \cdot u_1^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{u_2}{u_1}\right)' = \frac{c}{k u_1^2} \Rightarrow u_2 = u_1(x)\left[\int_{x_0}^{x} \frac{c \, d\xi}{k(\xi) u_1^2(\xi)} + c_1\right]$$

Ако $u_1(a) \neq 0 \Rightarrow u_2 \sim \ln(x-a)$ при $x \to a$

$u_1 = (x-a)^n \cdot g(x) \Rightarrow u_2 \sim (x-a)^{-n}$ при $x \to a$

При този случай общото решение е $Au_1 + Bu_2$ ако поискаме да е ограничено при $x \to a$ $\Rightarrow B = 0$. Това се нарича естествено условие за ограниченост. Същото се отнася и за другата граница на интервала, ако $u(b) = 0$ и $u = (b-x) \cdot g(x), \quad g(b) \neq 0$

Нека (a, b) е интервал. Търсим всички решения на уравнението (4.121) които на краищата на интервала удовлетворяват или хомогенни условия ($u(a)=0$, или $u'(a)=0$) при $k(a)>0$, или естественото условие за ограниченост, ако $k(a)=0$.

Общ резултат

Съществуват безброй много собствени стойности $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \dots$ (при $q(x) \geq 0 \Rightarrow \lambda_1 \geq 0$) със собствени функции $u_1, u_2, u_3, \dots$ (u_i е решение на (4.121) при $\lambda = \lambda_i$ със споменатите гранични условия). Собствените функции образуват пълна ортогонална система функции с тегло $\rho(x)$:

$$\int_a^b u_i(x) u_j(x) \cdot \rho(x) dx = \delta_{ij} \cdot c_i$$

Достатъчно гладките функции f (удовлетворяващи същите гранични условия) се развиват в ред по u_i. Ако освен това f е два пъти диференцируема редът е равномерно и абсолютно сходящ.

Доказателство на ортогоналността

$$-\left|\begin{array}{ll} (k u_n')' + \lambda_n \cdot \rho \cdot u_n - q u_n = 0 & \cdot u_m \\ (k u_m')' + \lambda_m \rho u_m - q u_m = 0 & \cdot u_n \end{array}\right.$$

$$u_m (k u_n')' - u_n (k u_m')' + (\lambda_n - \lambda_m) \rho u_n u_m = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda_m - \lambda_n) \rho . u_n u_m = (k (u_m u_n' - u_n u_m'))'$$

$$\Rightarrow (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b \rho(x) u_n(x) u_m(x) dx = \int_a^b k(x) (u_m u_n' - u_n u_m') dx =$$

$$= k(x) (u_m(x) u_n'(x) - u_n(x) u_m'(x)) \Big|_a^b = 0.$$

Параболични уравнение

Основен пример – уравнение на топлопроводността:

$$\Delta u(\vec{x},t) - a\frac{\partial}{\partial t}u(\vec{x},t) = -d(\vec{x},t) \qquad (5.1)$$

$a = \mathrm{const} > 0$. $(\vec{x},t) \in \mathbb{R}^4$ и матрицата пред старшите производни е

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det(a_{ij}) = 0$$

<u>Естествена област на решимост</u>

Обикновено се избира $V \times [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}^4$; $(\vec{x},t) \in V \times [t_0,t_1] \iff \vec{x} \subset V \;\&\; t \in [t_0,t_1]$, $V \subset \mathbb{R}^3$ област. Т.е. ние търсим изменението на температурата в обема V на ~~едно~~ тяло в интервала от време $[t_0,t_1]$

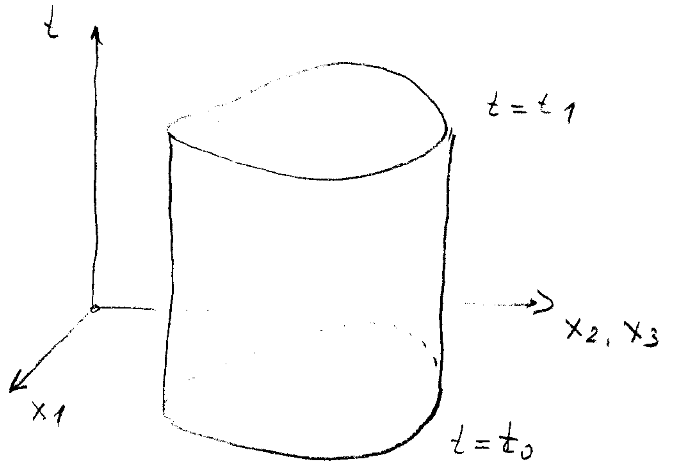
<u>Характеристични повърхнини</u>. Ако една характеристична повърхнина S се задава с уравнение $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$, (пишем $x_4 = t$ за да ползваме общите формули) трябва

$$\sum_{i,j=1}^{4} a_{ij}\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_j} = 0.$$ В нашия случай това

означава $\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)^2 = 0$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{\partial F}{\partial x_3} \Rightarrow$$ F зависи само от $x_4 = t$

Следователно характеристичните повърхнини имат вида $t = \mathrm{const}$ и върху тях не можем да задаваме независимо $u|_S$ и $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S$.



На чертежа е изобразена <u>естествената област на решимост</u>. $V \times \{t_0\}$ и $V \times \{t_1\}$ са долната и горна основа на криволинейния цилиндър. Те са характеристични повърхнини

Търсим решение в цялата област $V \times (t_0, t_1)$. Следните <u>допълнителни условия</u> определят решението еднозначно

<u>Начално условие</u>

$$u(x, t_0) = u_0(x) \quad , x \in V \tag{5.2}$$

<u>Гранични условия</u>

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & u(x,t) = u_S(x,t) \\ 2. & \dfrac{\partial u}{\partial n}(x,t) = V_S(x,t) \\ 3. & \dfrac{\partial u}{\partial n}(x,t) + \alpha(x,t)\,u(x,t) = W_S(x,t) \end{array}\right\} \begin{array}{ll} x \in S = \partial V & ; \text{Дирихле} \\ t \in [t_0, t_1] & ; \text{Нойман} \\ & ; \text{Смесена} \end{array} \tag{5.3}$$

$$\alpha(x,t) \geq 0$$

$u_0, u_S, V_S, W_S, \alpha$ са произволни (частично гладки) функции

<u>Физическа интуиция</u>: Изменението на температурата $u(x,t)$ в едно хомогенно тяло напълно се определя ако знаем плътността на обемните източници на топлина $(d(x,t))$, началното разпределение на температурата $u_0(x,t)$ и в зависимост от граничните задачи
1. Стойността на температурата по повърхността

във всеки момент ($u_S(x,t)$, $x \in S$, $t \in [t_0, t_1]$).
2. Потокът на топлина през повърхността във всеки момент
3. Ако знаем топлинната пропускателна способност на повърхността във всеки момент и температурата извън тялото.

Теорема за единственост
Началното условие, заедно с кое да е гранично условие определя решението еднозначно
Доказателство
Допускаме, че u_1 и u_2 са две решения на (5.1) удовлетворяващи едни и същи начални и гранични условия. Тогава разликата $u = u_1 - u_2$ удовлетворява хомогенното уравнение

$$\Delta u - a\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

и хомогенни начални и гранични условия.
Преобразуваме и пресмятаме следния интеграл

$$\int_V \int_{t_0}^{t_1} \operatorname{grad}^2 u(\vec{x},t)\, d^3x\, dt = \int_V \int_{t_0}^{t_1} \Big(\operatorname{grad}^2 u + u\big(\underbrace{\Delta u - a\frac{\partial u}{\partial t}}_{0}\big)\Big)\, d^3x\, dt =$$

$$\int_V \int_{t_0}^{t_1} \Big[\operatorname{div}(u.\operatorname{grad} u) - \frac{1}{2}a\frac{\partial}{\partial t}u^2\Big]\, d^3x\, dt =$$

$$= \oiint_S \int_{t_0}^{t_1} u.\operatorname{grad} u.\, d\vec{S}.\, dt - \int_V \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}a\frac{\partial}{\partial t}u^2\, d^3x\, dt =$$

$$= \oiint_S \int_{t_0}^{t_1} u.\frac{\partial u}{\partial n}\,|d\vec{S}|\, dt - \frac{a}{2}\int_V u^2(x,t_1)\, d^3x + \underbrace{\frac{a}{2}\int_V u^2(x,t_0)\, d^3x}_{0}$$

Повърхнинният интеграл е нула при първа и втора гранична задача.

При третата гранична задача той е равен на $- \oiint_S \int_{t_0}^{t_1} \alpha(x,t)\, u^2(x,t)\, |d\vec{s}|\, dt$

Получихме, че

$$\int_V \int_{t_0}^{t_1} \operatorname{grad}^2 u(x,t)\, d^3x\, dt = -\frac{a}{2} \int_V u^2(x,t_2)\, d^3x \; + \tag{5.4}$$

$$+ \begin{cases} 0 & 1 \text{ и } 2 \text{ гр. задача} \\ - \oiint_S \int_{t_0}^{t_1} \alpha(x,t)\, u^2(x,t)\, |d\vec{s}|\, dt & 3 \text{ гр. задача} \end{cases}$$

Лявата страна е винаги неотрицателна а дясната е неположителна (съществено се използва, че $a > 0$ & $\alpha(x,t) \geq 0$. Следователно

$$\int_V \int_{t_0}^{t_1} \operatorname{grad}^2 u(x,t)\, d^3x\, dt = 0 \Rightarrow \operatorname{grad} u(x,t) = 0$$

като функция, защото подинтегралната функция е неотрицателна. $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$

Но от $\Delta u - a \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \Rightarrow a \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \Rightarrow u(x,t) = \text{const}$$

От началното условие $u(x,t_0) = 0 \Rightarrow u(x,t) = 0$ в $V \times [t_0, t_1] \Rightarrow u_1(x,t) = u_2(x,t)$

<u>Съществуване на решение.</u>

Доказателството се пропуска. Физическата интуиция от термодинамиката показва "че съществува". Чрез разделяне на променливите в много примери ще покажем съществуване на решение при произволни начални и гранични условия.

Коментар. При допълнителните условия за "горната основа", $t = t_1$ не се иска нищо. Знакът $-a$, при $a > 0$ в (5.1) беше съществен. Той се използваше в (5.4). Ако в уравнението (5.1) имаше $+a\frac{\partial u}{\partial t}$ доказателството за единственост щe бъде в сила ако началното условие ($t = t_0$) се замени с финално, при $t = t_1$.

Спрегнато уравнение. Съгласно общото понятие за спрегнат линеен диференциален оператор, спрегнатото уравнение е

$$\Delta u + a\frac{\partial u}{\partial t} = -d \quad . \qquad (5.5)$$

Спрегнати допълнителни условия:

финално условие: $u(x, t_1) = u_1(x)$, $x \in V$
същите гранични условия.

Теорема за еднозначност:
Спрегнатите допълнителни условия определят еднозначно решението на спрегнатото уравнение. (Доказателството е аналогично).

(Преминаването към спрегнато уравнение и спрегнати допълнителни условия е еквивалентно на обръщане на времето $t \to t' = t$)

Фундаментално решение се нарича всяко решение на уравнението

$$\Delta u - a\frac{\partial u}{\partial t} = -\delta(\vec{x}-\vec{\xi}, t-\theta) \quad (5.6)$$

т.е. решение на (5.1) с точков и моментен източник.

Функция на Грийн се нарича единственото фундаментално решение с нулеви начални и гранични условия. Т.е функцията на Грийн $G(x,t,\xi,\theta)$ се определя от

$$\Delta G - a\frac{\partial}{\partial t}G = -\delta(x-\xi, t-\theta)$$

Нач. условие $G(x,t_0,\xi,\theta)=0$

Гр. условия

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & G(x,t,\xi,\theta)=0 \\ 2. & \frac{\partial}{\partial n}G(x,t,\xi,\theta)=0 \\ 3. & \frac{\partial}{\partial n}G(x,t,\xi,\theta)+\alpha(x,t).G=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x\in S \\ t\in[t_0,t_1] \end{array}$$

$\vec{\xi}\in V$, мястото на източника

$\theta\in(t_0,t_1)$ момента на източника

Спрегната функция на Грийн $H(x,t,\xi,\theta)$ се дефинира като фундаментално решение на спрегнатото уравнение с нулеви финално и гранични условие:

$$\Delta H + a\frac{\partial}{\partial t}H = -\delta(x-\xi, t-\theta)$$

финално условие: $H(x,t_1,\xi,\theta)=0$ и нулеви гранични условия.

Теорема за взаимност. В сила е равенството

$$G(\vec{x}, t, \vec{\xi}, \theta) = H(\vec{\xi}, \theta, \vec{x}, t) \; ; \quad \begin{matrix} \vec{x} \neq \vec{\xi} \\ t \neq \theta \end{matrix} \qquad (5.7)$$

Доказателство

Пресмятаме по различен начин интеграла

$$A = \int_V \int_{t_0}^{t_1} \left[G'\left(\Delta H'' + a \frac{\partial}{\partial t} H''\right) - H''\left(\Delta G' - a \frac{\partial}{\partial t} G'\right)\right] d^3x\, dt$$

където
$$G'(x,t) = G(x, t, \xi', \theta')$$
$$H''(x,t) = H(x, t, \xi'', \theta'')$$

$$A = \int_V \int_{t_0}^{t_1} \left[-G'(x,t)\,\delta(x-\xi'', t-\theta'') + H''(x,t)\,\delta(x-\xi', t-\theta')\right] d^3x\, dt$$

$$= -G(\xi'', \theta'', \xi', \theta') + H(\xi', \theta', \xi'', \theta'')$$

от друга страна

$$A = \int_V \int_{t_0}^{t_1} \left[\operatorname{div}(G' \operatorname{grad} H'' - H'' \operatorname{grad} G') + a \frac{\partial}{\partial t}(G' H'')\right] d^3x\, dt$$

$$= \underbrace{\oint_S \int_{t_0}^{t_1} \left[G' \frac{\partial}{\partial n} H'' - H'' \frac{\partial}{\partial n} G'\right] |d\vec{S}|\, dt}_{0} + a \underbrace{\int_V G' H'' \Big|_{t=t_1} d^3x}_{0,\ \text{финално условие за } H} - a \underbrace{\int_V G' H'' \Big|_{t=t_0} d^3x}_{0,\ \text{начално условие за } G}$$

I и II гр. задача

хомогенни гр. усл. за G и H

при III гр. задача $\frac{\partial}{\partial n} G' = -\alpha G'$, $\frac{\partial}{\partial n} H'' = -\alpha H''$

$$G' \frac{\partial}{\partial n} H'' - H'' \frac{\partial}{\partial n} G' = -\alpha G' H'' + \alpha G' H'' = 0$$

$\Rightarrow A = 0$ и сравнявайки с първия израз получаваме (5.7)

Следствие

$$\Delta_\xi G(x,t,\xi,\theta) + a\frac{\partial}{\partial\theta} G(x,t,\xi,\theta) = -\delta(x-\xi, t-\theta)$$

$$G(x,t,\xi,\theta)\Big|_{\theta=t_1} = 0 \qquad (5.8)$$

$$G(x,t,\xi,\theta) = 0 \quad , \quad \xi \in S \quad \text{и т.н.}$$

нулеви гранични условия по променливите (ξ,θ).

Ако за дадена област на решимост и зададен тип гранична задача знаем функцията на Грийн ние можем да намерим решение на уравнението при произволен източник и произволни допълнителни условия само чрез интегриране.

Нека u е решение на (5.1) определено от дадено начално условие и някоя от граничните задачи. Пресмятаме по различни начини интеграла

$$B(x,t) = \int_V\int_{t_0}^{t_1}\left[G(x,t,\xi,\theta)\left(\Delta_\xi u(\xi,\theta) - a\frac{\partial}{\partial\theta}u\right) - u\left(\Delta_\xi G + a\frac{\partial}{\partial\theta}G\right)\right] d^3\xi\, d\theta =$$

$$= \int_V\int_{t_0}^{t_1}\left[-G(x,t,\xi,\theta)\, d(\xi,\theta) + u(\xi,\theta)\,\delta(x-\xi, t-\theta)\right] d^3\xi\, d\theta$$

$$= u(x,t) - \int_V\int_{t_0}^{t_1} G(x,t,\xi,\theta)\, d(\xi,\theta)\, d^3\xi\, d\theta$$

Пресмятаме $B(x,t)$ по друг начин

$$B = \int_V\int_{t_0}^{t_1}\left[\operatorname{div}_\xi(G.\operatorname{grad}_\xi u - u.\operatorname{grad}_\xi G) - a\frac{\partial}{\partial\theta}(u.G)\right] d^3\xi\, d\theta =$$

$$= \oint\!\!\oint_S \int_{t_0}^{t_1} \left[G \frac{\partial}{\partial \nu} u - u \frac{\partial}{\partial \nu} G \right] |d\vec{\sigma}|\, d\theta \; -$$

$$- \underbrace{a \int_V u(\xi, t_1)\, G(x, t, \xi, t_1)}_{0 \text{ от } (5.8)} d^3\xi + a \int_V u(\xi, t_0)\, G(x, t, \xi, t_0)\, d^3\xi$$

Повърхнинният интеграл при различните гранични задачи съответно е

I гр. задача:

$$- \oint\!\!\oint_S \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial \nu} G(x, t, \xi, \theta) . u_S(\xi, \theta) |d\vec{\sigma}| . d\theta$$

II гр. задача:

$$\oint\!\!\oint_S \int_{t_0}^{t_1} G(x, t, \xi, \theta)\; V_S(\xi, \theta) |d\vec{\sigma}|\, d\theta$$

III гр. задача: $\frac{\partial}{\partial \nu} G = -\alpha G$

$$\Rightarrow \oint\!\!\oint_S \int_{t_0}^{t_1} G . \left(\frac{\partial}{\partial \nu} u + \alpha u \right) |d\vec{\sigma}|\, d\theta = \oint\!\!\oint_S \int_{t_0}^{t_1} G(x, t, \xi, \theta) W_S(\xi, \theta) |d\vec{\sigma}|\, d\theta .$$

Сравнявайки двата резултата получаваме

$$u(x,t) = \int_V \int_{t_0}^{t_1} G(x, t, \xi, \theta)\, f(\xi, \theta)\, d^3\xi\, d\theta \; +$$

$$+ a \int_V G(x, t, \xi, t_0)\, u_0(\xi)\, d^3\xi \; + \qquad (5.9)$$

$$+ \begin{cases} - \oint\!\!\oint_S \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial \nu} G(x, t, \xi, \theta)\, u_S(\xi, \theta) |d\vec{\sigma}|\, d\theta, & \text{I гр. зад.} \\ \oint\!\!\oint_S \int_{t_0}^{t_1} G(x, t, \xi, \theta)\; V_S(\xi, \theta) |d\vec{\sigma}|\, d\theta, & \text{II гр. зад.} \\ \oint\!\!\oint_S \int_{t_0}^{t_1} G(x, t, \xi, \theta)\, W_S(\xi, \theta) |d\vec{\sigma}|\, d\theta, & \text{III гр. зад.} \end{cases}$$

Причинност. В сила е

$$G(x,t,\xi,\theta)=0 \quad \text{при} \quad t<\theta \qquad (5.10)$$

Това следва от единствеността на решението. В областта на решимост $V\times[t_0,\theta)$ $G(x,t,\xi,\theta)$ е решение на хомогенно уравнение с нулеви начални и гранични условия $\Rightarrow G=0$!. В интегралите (5.9) интегрирането по θ е всъщност от t_0 до t. По нататък G е нула (5.10). Физически това е очевидно "Не може настоящето да се определя от бъдещето".

Функция на Грийн за цялото пространство R^3

$$G(\vec{x},t,\vec{0},0)=\theta(t)\,\frac{\sqrt{a}}{(4\pi t)^{3/2}}\,e^{-\frac{ax^2}{4t}}. \qquad (5.11)$$

$$\theta(t)\,\frac{1}{a}\left(\sqrt{\frac{a}{4\pi t}}\right)^n e^{-\frac{ax^2}{4t}}$$

Фронтът на разпространение на сигнала е характеристичната повърхнина $t=0$. В един миг температурата в цялото пространство започва да се променя! Т.е. температурният сигнал е с безкрайно голяма скорост!

Това е функция на Грийн едновременно за трите гранични задачи.

Функцията на Грийн с произволен полюс е

$$G(\vec{x},t,\vec{\xi},\theta)=\theta(t-\theta)\,\frac{\sqrt{a}}{(4\pi(t-\theta))^{3/2}}\,e^{-\frac{a(\vec{x}-\vec{\xi})^2}{4(t-\theta)}}. \qquad (5.12)$$

Доказателство че (5.11) е функция на Грийн.

Елементарна проверка показва, че при $t>0$ (5.11) удовлетворява хомогенното уравнение

$$G = t^{-\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{a}}{(4\pi)^{3/2}} e^{-\frac{ax^2}{4t}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} G = \left(-\frac{3}{2}\frac{1}{t} + \frac{ax^2}{4t^2}\right) G$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} G = -\frac{a x_1}{2t} G \quad ; \quad \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} G = \left(-\frac{a}{2t} + \frac{a^2 x_1^2}{4t^2}\right) G$$

$$\Rightarrow \Delta G - a \frac{\partial}{\partial t} G = \left[-3\frac{a}{2t} + \frac{a^2x^2}{4t^2} + a\frac{3}{2}\frac{1}{t} - \frac{a^2x^2}{4t^2}\right] G = 0$$

Трябва да покажем, че $\Delta G - a\frac{\partial G}{\partial t} = -\delta(\vec{x}, t)$.
Помощен факт: при $t>0$

$$\int_{\mathbb{R}^3} G(x,t)\, d^3x = \frac{\sqrt{a}}{(4\pi t)^{3/2}} \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}{4t}} dx_1 dx_2 dx_3 =$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{(4\pi t)^{3/2}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{ax_1^2}{4t}} dx_1\right]^3 = \frac{\sqrt{a}}{(4\pi t)^{3/2}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{ax_1^2}{4t}} dx_1 \cdot \sqrt{\frac{a}{4t}} \cdot \sqrt{\frac{4t}{a}}\right]^3 =$$

$$= \frac{1}{a}\left(\frac{a}{4\pi t}\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{4t}{a}\right)^{3/2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du\right]^3 = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{1}{\pi}\right)^{3/2} \cdot (\pi)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{a} = \text{const.}$$

Физическа интерпретация: Общото количество топлина излъчено от точков моментен източник се запазва.

Нека $\varphi(\vec{x}, t)$ е пробна функция от $\mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{-\infty}^{+\infty} (\Delta G - a\,\partial_t G)\, \varphi(x,t)\, d^3x\, dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3}\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,t)\,(\Delta\varphi + a\,\partial_t \varphi)\, d^3x\, dt =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\varepsilon}^{+\infty} G(x,t)\,(\Delta\varphi + a\,\partial_t \varphi)\, d^3x\, dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\varepsilon}^{+\infty} G(x,t)\,\Delta\varphi(x,t)\, d^3x\, dt \; +$$

$$+ \lim_{\varepsilon \to 0} a \int_{\mathbb{R}^3} \left[G(x,t)\varphi(x,t)\Big|_{\varepsilon}^{+\infty} - \int_{\varepsilon}^{\infty} \varphi(x,t)\,\partial_t G(x,t)\, dt \right] d^3x =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \Delta G(x,t)\,.\,\varphi(x,t)\, d^3x\, dt \; -$$

$$- \lim_{\varepsilon \to 0} a \int_{\mathbb{R}^3} G(x,\varepsilon)\,\varphi(x,\varepsilon)\, d^3x - \lim_{\varepsilon \to 0} a \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\varepsilon}^{\infty} \varphi(x,t)\,\partial_t G\; d^3x\, dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\varepsilon}^{\infty} \big(\underbrace{\Delta G(x,t) - a\,\partial_t G(x,t)}_{=0} \big)\, \varphi(x,t)\, d^3x\, dt \; -$$

$$- \lim_{\varepsilon \to 0} a \int_{\mathbb{R}^3} G(x,\varepsilon)\,\varphi(x,\varepsilon)\, d^3x =$$

$$= -a \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^3} G(x,\varepsilon)\,\varphi(x,0)\, d^3x \; -$$

$$- a \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^3} G(x,\varepsilon) \left[\varphi(x,\varepsilon) - \varphi(x,0) \right] d^3x$$

Преценяваме втория член

$$\left| a \int_{\mathbb{R}^3} G(x,t) \left[\varphi(x,\varepsilon) - \varphi(x,0) \right] d^3x \right| \le$$

$$\le a \int_{\mathbb{R}^3} G(x,t)\, \left| \varphi(x,\varepsilon) - \varphi(x,0) \right| d^3x \le$$

$$\le a \int_{\mathbb{R}^3} G(x,t)\, d^3x \,.\, \max \left| \varphi(x,\varepsilon) - \varphi(x,0) \right| =$$

$$= a \,.\, \frac{1}{a} \,.\, \max \left| \varphi(x,\varepsilon) - \varphi(x,0) \right| \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

Остава да покажем, че

$$\lim_{\varepsilon \to 0} a \int_{\mathbb{R}^3} G(x,\varepsilon)\,\varphi(\vec{x},0)\,d^3x = \varphi(\vec{0},0)$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} a\,G(\vec{x},\varepsilon)\,\varphi(\vec{x},0)\,d^3x - \varphi(\vec{0},0) \right| =$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^3} a\,G(\vec{x},\varepsilon)\,[\varphi(\vec{x},0) - \varphi(\vec{0},0)]\,d^3x \right| \le$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^3} a\,G(\vec{x},\varepsilon)\,|\varphi(\vec{x},0) - \varphi(\vec{0},0)| \le a.K \int_{\mathbb{R}^3} G(\vec{x},\varepsilon)\,|x|\,d^3x =$$

Тук е използвано, че съществува оценка

$$|\varphi(\vec{x},0) - \varphi(\vec{0},0)| \le K\,|x|$$

$$= a.K.\frac{\sqrt{a}}{(4\pi\varepsilon)^{3/2}} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{-\frac{ar^2}{4\varepsilon}}\, r^3 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= K_1 . \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{3/2} \int_0^\infty e^{-\frac{ar^2}{4\varepsilon}} . r^3 dr =$$

$$= K_1 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{3/2} \int_0^\infty e^{-\frac{ar^2}{4\varepsilon}} \left(\frac{\sqrt{a}\,r}{\sqrt{4\varepsilon}}\right)^3 d\,\frac{r.\sqrt{a}}{\sqrt{4\varepsilon}} . \left(\frac{4\varepsilon}{a}\right)^2 =$$

$$= K_2 . \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^{3/2}} \int_0^\infty e^{-u^2} u^3\, du = K_3 \sqrt{\varepsilon} \to 0$$

Константите K_1, K_2, K_3 не зависят от ε

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} a \int G(x,\varepsilon)\,\varphi(\vec{x},0)\,d^3x = \varphi(\vec{0},0)$$

Това завършва доказателството

Хиперболично уравнение.

Основен пример - Вълново уравнение или уравнение на Даламбер:

$$\Delta u(\vec{x},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\vec{x},t) = -\mathcal{d}(\vec{x},t), \qquad (6.1)$$

$c = \mathrm{const}$. Матрицата пред старшите производни е

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} \end{bmatrix}$$

и уравнението е очевидно хиперболично.

Повърхнините определени от уравнението

$$F(x_1, x_2, x_3, t) = \qquad (6.2)$$

$$= (x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2 - c^2(t-t')^2 = 0$$

са характеристични. Действително, в този случай

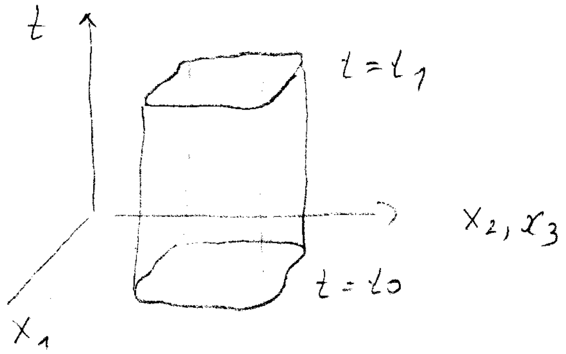
$$\sum_{i,j=1}^{4} a_{ij}\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_j} =$$

$$= 4(x_1 - x_1')^2 + 4(x_2 - x_2')^2 + 4(x_3 - x_3')^2 - \frac{1}{c^2}\cdot 4c^4(t-t')^2 = 0$$

за точките (x_1, x_2, x_3, t) удовлетворяващи (6.2). Уравнението (6.2) определя така наречения светлинен конус с връх точката (x_1', x_2', x_3', t'). Статиката в пространство времето $(\vec{x}, t)$ е динамика в R^3. Светлинния конус в $R^3 \times R^1$ съответствува на сфера с център в $\vec{x}'$ чийто радиус се променя със скоростта на светлината. (Съгласно приведени коментари, а характеристичните повърхнини светлинният конус е фронтът по който се разпространява сигнал от точков източник). При една точка $(\bar{x}, t)$ минават много характеристични повърхнини.

Естествена област на решимост.

Отново тя се избира както при уравнението на топлопроводността $V \times [t_0, t_1] \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^1$ където $V \subset \mathbb{R}^3$ е (ограничена) област. $\partial V = S$ означава границата на V.



Ке пертенсе горнето и долната основа съответстват на $V \times \{t_1\}$ и $V \times \{t_0\}$ а околната повърхнина на $\partial V \times [t_0, t_1]$

Следните допълнителни условия определят решението еднозначно

Начални условия

$$\left.\begin{aligned} u(x, t_0) &= U_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_0) &= V_0(x) \end{aligned}\right\} \quad x \in V \qquad (6.2)$$

Гранични условия

$$\left.\begin{aligned} &1.\ (\text{Дирихле}):\ u(x,t) = U_S(x,t) \\ &2.\ (\text{Нойман}):\ \frac{\partial u}{\partial n}(x,t) = V_S(x,t) \\ &3\ (\text{Смесено}):\ \frac{\partial}{\partial n} u(x,t) + \alpha(x,t)\, u = W_S(x,t) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} & x \in \partial V = S \\ & t \in [t_0, t_1] \end{aligned} \qquad (6.3)$$

$$\alpha(x,t) \geq 0$$

Където U_0, V_0, U_S, V_S, W_S α са произволни, (частично гладки функции. При $t = t_1$ (горнето основа няма никакви ограничения.

Теорема за еднозначност.
Началните условия заедно с кое да е гранично условие определят решението еднозначно.

Доказателство

Допускаме, че u_1 и u_2 са решения на (6.1), удовлетворяващи едни и същи начални и гранични условия. Тогава $u = u_1 - u_2$ е решение на

$$\Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u = 0 \qquad (6.4)$$

което удовлетворява хомогенни начални и гранични условия.

Междинен резултат: Пресмятаме

$$2\,\mathrm{div}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\cdot \mathrm{grad}\,u\right) =$$

$$= 2\frac{\partial u}{\partial t}\,\Delta u + 2\,\mathrm{grad}\frac{\partial u}{\partial t}\cdot \mathrm{grad}\,u =$$

$$= 2\frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{grad}\,u)\cdot \mathrm{grad}\,u =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{grad}^2 u\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{grad}^2 u + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right).$$

Тогава, ако интегрираме по x:

$$\frac{d}{dt}\int_V \left(\mathrm{grad}^2 u + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right)d^3x = 2\int_V \mathrm{div}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\cdot \mathrm{grad}\,u\right)d^3x$$

$$= 2\oint_S \frac{\partial u}{\partial t}\cdot \mathrm{grad}\,u \cdot d\vec{S} = 2\oint_S \frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial u}{\partial n}\,|d\vec{S}| \qquad (6.5)$$

При $\underline{I}$ гр. задача $u(x,t)=0$ при $x\in S$
$\Rightarrow \partial_t u(x,t)=0$, $x\in S$ $\Rightarrow$ повърхнинният интеграл в (6.5) е нула.

При $\underline{II}$ гр. задача $\frac{\partial u}{\partial n}(x,t)=0$ при $x\in S$ и повърхнинният интеграл в (6.5) е нула.

И в двата случая: $\frac{d}{dt}\int_V [\operatorname{grad}^2 u + \frac{1}{c^2}(\frac{\partial u}{\partial t})^2]\, d^3x = 0$

$\Rightarrow \int_V [\dots] = const$ (като функция от t) но при

$t=t_0$ $\quad u(x,t_0)=0 \Rightarrow \operatorname{grad} u(x,t_0)=0$ и
$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t_0)=0$ $\Rightarrow$ тази константа е 0 и

$\int_V [\operatorname{grad}^2 u + \frac{1}{c^2}(\frac{\partial u}{\partial t})^2]\, d^3x = 0$, подинтегралната

функция е неотрицателна $\Rightarrow \operatorname{grad}^2 u(x,t) + \frac{1}{c}\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|^2 = 0$
$\Rightarrow \partial_{x_1} u = \partial_{x_2} u = \partial_{x_3} u = \partial_t u = 0 \Rightarrow u(x,t) = const.$
Но при $t=t_0 \Rightarrow u(x,t_0)=0 \Rightarrow u(x,t)=0$
$\Rightarrow u_1(x,t) = u_2(x,t)$

При $\underline{III}$ гр. задача $\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial n} = -\alpha u;$

$\Rightarrow 2\oint_S \frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial u}{\partial n}\,|d\vec{s}| = -2\oint_S \frac{\partial u}{\partial t}\cdot\alpha\cdot u\,|d\vec{s}|$.

Ще докажем теоремата в този случай ако $\alpha(\vec{x},t) = \alpha(\vec{x})$, (не зависи от t) тогава
$-2\oint \frac{\partial u}{\partial t}\cdot\alpha\cdot u\,|ds| = -\frac{d}{dt}\oint_S \alpha\cdot u^2\,|ds|$.

От (6.5) получаваме
$\frac{d}{dt}\left[\int_V [\operatorname{grad}^2 u + \frac{1}{c^2}(\frac{\partial u}{\partial t})^2]\, d^3x + \oint_S \alpha\cdot u^2\,|d\vec{s}|\right] = 0$

$\Rightarrow \int_V [\dots]\, d^3x + \oint_S [\dots]\,|d\vec{s}| = const = 0$

Защото при $t=t_0$ $u(x,t_0)=0$, $x\in V$, (и $x\in \partial V=S$), $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t_0)=0$

Интегралите са неотрицателни $\Rightarrow$

$$\int_V \left[\operatorname{grad}^2 u + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right] d^3x = 0$$

и както в първите два случая $u = 0 \Rightarrow u_1(x,t) = u_2(x,t)$.

Теоремата за съществуване е по-сложна и се пропуска. Многобройните решени примери (по метода на Фурие), както и физическата интуиция от процесите описвани с вълновото уравнение говорят в полза на това, че при произволен източник, начални и гранични условия решение съществува.

Спрегнато уравнение. Съгласно дефиницията на спрегнат линеен диференциален оператор

$$D[u] = \sum_{ij} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu$$

$$\tilde{D}[u] = (-1)^2 \sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(a_{ij}.u) + (-1)^1 \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}[b_j u] + c.u$$

спрегнатото уравнение е същото уравнение

Спрегнати допълнителни условия

финални условия:

$$\left.\begin{aligned} u(x,t_1) &= u_1(x) \\ \partial_t u(x,t_1) &= v_1(x) \end{aligned}\right\} x\in V$$

Същите гранични условия.

Спрегнатите допълнителни условия определят решението еднозначно. Доказателството е същото, но когато се доказва, че някои константи (обемния интеграл) са нули трябва да се използват финалните условия.

<u>Фундаментално решение</u> наричаме всяко решение на уравнението

$$\Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\delta(\vec{x}-\vec{\xi}, t-\theta) \qquad (6.6)$$

Дясната страна съответства на <u>точков</u>, <u>моментен</u> източник.

<u>Функция на Грийн</u> се нарича единственото фундаментално решение с нулеви начални и гранични условия. Т.е. функцията на Грийн $G(x,t,\xi,\theta)$ се определя от

$$\Delta G(x,t,\xi,\theta) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}G(x,t,\xi,\theta) = -\delta(x-\xi, t-\theta), \qquad (6.7)$$

нулеви <u>начални</u> условия:

$$\left.\begin{aligned} G(x,t_0,\xi,\theta) &= 0 \\ \partial_t G(x,t_0,\xi,\theta) &= 0 \end{aligned}\right\} x \in V \qquad (6.8)$$

и нулеви гранични условия

$$\left.\begin{aligned} &1.\ G(x,t,\xi,\theta) = 0 \\ &2.\ \frac{\partial}{\partial n}G(x,t,\xi,\theta) = 0 \\ &3.\ \frac{\partial}{\partial n}G(x,t,\xi,\theta) + \alpha(x,t)\,G = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &x \in S \\ &t \in [t_0, t_1] \end{aligned} \qquad (6.9)$$

<u>Спрегнатата функция на Грийн</u> $H(x,t,\xi,\theta)$ се определя от

$$\Delta H(x,t,\xi,\theta) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = -\delta(x-\xi, t-\theta) \qquad (6.10)$$

нулеви <u>финални</u> условия

$$\left.\begin{aligned} H(x,t_1,\xi,\theta) &= 0 \\ \partial_t H(x,t_1,\xi,\theta) &= 0 \end{aligned}\right\} x \in V \qquad (6.11)$$

и нулеви гранични условия, както (6.9).

<u>Теорема за взаимност</u>. В сила е равенството

$$G(\vec{x},t,\vec{\xi},\theta) = H(\vec{\xi},\theta,\vec{x},t) \tag{6.12}$$

<u>Доказателство</u>. Означаваме

$G'(x,t) = G(x,t,\xi',\theta')$; $H''(x,t) = H(x,t,\xi'',\theta'')$.

Пресмятаме по различни начини интеграла

$$A = \int_V \int_{t_0}^{t_1} \left[G'\left(\Delta H'' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}H''\right) - H''\left(\Delta G' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}G'\right)\right] d^3x\, dt =$$

$$\int_V \int_{t_0}^{t_1} \left[-G'(x,t)\delta(x-\xi'',t-\theta'') + H''(x,t)\delta(x,t,\xi',\theta')\right] d^3x\, dt$$

$$= -G'(\xi'',\theta'') - H''(\xi',\theta') = -G(\xi'',\theta'',\xi',\theta') + H(\xi',\theta',\xi'',\theta'').$$

От друга страна

$$A = \int_V \int_{t_0}^{t_1} \left[G'\Delta H'' - H''\Delta G' - \frac{1}{c^2}\left(G'\frac{\partial^2}{\partial t^2}H'' - H''\frac{\partial^2}{\partial t^2}G'\right)\right] d^3x\, dt =$$

$$\int_V \int_{t_0}^{t_1} \left[\operatorname{div}(G'\operatorname{grad} H'' - H''\operatorname{grad} G') - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(G'\frac{\partial}{\partial t}H'' - H''\frac{\partial}{\partial t}G'\right)\right] d^3x\, dt =$$

$$= \underbrace{\oint\!\!\oint_S \int_{t_0}^{t_1} \left(G'\frac{\partial}{\partial n}H'' - H''\frac{\partial}{\partial n}G'\right)|d\vec{S}|\, dt}_{=0} \; \underbrace{- \frac{1}{c^2}\int_V \left(G'\partial_t H'' - H''\partial_t G'\right)\Big|_{t_0}^{t_1} d^3x}_{=0 \text{ от нулевите начални и финални условия}}$$

I гр. зад. $G'(x,t) = 0 = H''(x,t)$, при $x \in S$

II гр. зад. $\frac{\partial}{\partial n}G'(x,t) = 0 = \frac{\partial}{\partial n}H''(x,t)$, при $x \in S$

III гр. зад. $\frac{\partial}{\partial n}G'(x,t) = -\alpha G'$ & $\frac{\partial}{\partial n}H''(x,t) = -\alpha H''$, при $x \in S$

$$\Rightarrow \left(G'\frac{\partial}{\partial n}H'' - H''\frac{\partial}{\partial n}G'\right) = \left(-G'.\alpha.H'' + H''.\alpha.G'\right) = 0$$

Сравняваме двата резултата и получаваме (6.12)

Следствие. Ако $G(x,t,\xi,\theta)$ е функция на Грийн по втората група променливи е спрегнатата функция на Грийн. Т.е. удовлетворява

$$\Delta_\xi G(x,t,\xi,\theta) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} G(x,t,\xi,\theta) = -\delta(x-\xi, t-\theta) \quad . \qquad (6.13)$$

и нулеви финални условия:

$$\left.\begin{array}{l} G(x,t,\xi,t_1) = 0 \\ \partial_\theta G(x,t,\xi,t_1) = 0 \end{array}\right\} x \in V \qquad (6.14)$$

и нулеви гранични условия

1. $G(x,t,\xi,\theta) = 0, \quad \xi \in S, \theta \in [t_0, t_1]$ (6.15)

и.т.н.

Ако за дадена област на решимост и зададен тип гранична задача знаем функцията на Грийн ние можем да намерим решение на уравнението при произволен източник и произволни допълнителни условия само чрез диференциране и интегриране на известни величини.

Нека u е решение на (6.1) определено от зададени начални условия и някоя от граничните задачи. Пресмятаме по различни начини интеграла.

$$B(\vec{x},t) = \int_V\int_{t_0}^{t_1} \left[G.\left(\Delta_\xi u(\xi,\theta) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}u(\xi,\theta)\right) - u.\left(\Delta_\xi G(x,t,\xi,\theta) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}G\right)\right] d^3\xi\, d\theta =$$

Внего се интегрира по $\vec{\xi}\ \theta$ и той зависи от $\vec{x}$ и t като от параметри.

$$= \int_V\int_{t_0}^{t_1} [-G(x,t,\xi,\theta).d(\xi,\theta) + u(\xi,\theta)\delta(x-\xi, t-\theta)]\, d^3\xi\, d\theta =$$

$$= u(x,t) - \int_V\int_{t_0}^{t_1} G(\vec{x},t,\xi,\theta)\, d(\xi,\theta)\, d^3\xi\, d\theta \, .$$

Пресмятаме $B(x,t)$ по друг начин

$$B = \int\limits_V \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[G \Delta_\xi U - U \Delta_\xi G - \frac{1}{c^2}\left(G \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} U - U \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} G \right)\right] d^3\xi \, d\theta =$$

$$= \int\limits_V \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\operatorname{div}_\xi (G \cdot \operatorname{grad}_\xi U - U \cdot \operatorname{grad}_\xi G) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(G \frac{\partial}{\partial \theta} U - U \frac{\partial}{\partial \theta} G \right)\right] d^3\xi \, d\theta$$

$$= \oint\limits_S \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[G(x,t,\xi,\theta) \frac{\partial}{\partial \nu} U(\xi,\theta) - U(\xi,\theta) \frac{\partial}{\partial \nu} G(x,t,\xi,\theta) \right] |d\vec{\sigma}| \, d\theta \; -$$

$$\underbrace{- \frac{1}{c^2} \int\limits_V \left(G \frac{\partial U}{\partial \theta} - U \frac{\partial}{\partial \theta} G \right)\Bigg|_{\theta = t_1} d^3\xi}_{=0} + \frac{1}{c^2} \int\limits_V \left(G \frac{\partial U}{\partial \theta} - U \frac{\partial}{\partial \theta} G \right)\Bigg|_{\theta = t_0} d^3\xi$$

Подчертаният интеграл е нула поради (6.14) нулевите начални условия на $G(x,t,\xi,\theta)$ по променливите (ξ,θ).

В зависимост от граничните задачи първият интеграл, поради нулевите гранични условия е:

1. (Дирихле) $\rightarrow \; - \oint\limits_S \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial \nu} G(x,t,\xi,\theta) \, U(\xi,\theta) \, |d\vec{\sigma}| \, d\theta$

2. (Нойман) $\rightarrow \; \oint\limits_S \int\limits_{t_0}^{t_1} G(x,t,\xi,\theta) \frac{\partial}{\partial \nu} U(\xi,\theta) \, |d\vec{\sigma}| \, d\theta$

3. (Смесена) $\rightarrow \; \oint\limits_S \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(G \frac{\partial}{\partial \nu} U - U \frac{\partial}{\partial \nu} G \right) |d\vec{\sigma}| \, d\theta =$

$$= \oint\limits_S \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(G \frac{\partial}{\partial \nu} U + U \cdot \alpha \cdot G \right) |d\vec{\sigma}| \, d\theta = \oint\limits_S \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(G \left(\frac{\partial}{\partial \nu} U + \alpha U \right)\right) |d\vec{\sigma}| \, d\theta$$

Сравнявайки двата резултата за B, получаваме, че търсеното решение се изразява чрез известни величини: източника, началните и граничните условия, функцията на Грийн и нейната нормална производна.

$$u(x,t) = \int_V \int_{t_0}^{t_1} G(x,t,\xi,\theta)\cdot f(\xi,\theta)\cdot d^3\xi\, d\theta \; +$$

$$+ \frac{1}{c^2}\int_V G(x,t,\xi,t_0)\cdot V_0(\xi)\, d^3\xi \; - \frac{1}{c^2}\int_V \frac{\partial}{\partial\theta} G(x,t,\xi,t_0)\cdot U_0(\xi)\, d^3\xi \; +$$

$$+ \begin{cases} -\oiint_S \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial \nu} G(x,t,\xi,\theta)\, U_S(\xi,\theta)\, |d\vec{\sigma}|\, d\theta & ; \text{ Дирихле} \\ \oiint_S \int_{t_0}^{t_1} G(x,t,\xi,\theta)\, V_S(\xi,\theta)\, |d\vec{\sigma}|\, d\theta & ; \text{ Нойман} \\ \oiint_S \int_{t_0}^{t_1} G(x,t,\xi,\theta)\, W_S(\xi,\theta)\, |d\vec{\sigma}|\, d\theta & ; \text{ Смесена} \end{cases}$$

<u>Причинност</u>. Изследването на причинността в този случай води до основите на специалната теория на относителността.
Ако точката (x,t) е извън светлинния конус на бъдещето с връх (ξ,θ) тогава $G(x,t,\xi,\theta)=0$ (т.е. когато $(\vec{x}-\vec{\xi})^2 > c^2(t-\theta)^2$ или $t<\theta$)

<u>Функция на Грийн за цялото пространство $\mathbb{R}^3$</u>

$$G(\vec{x},t,\vec{0},0) = \frac{1}{4\pi r}\,\delta\left(t-\frac{r}{c}\right), \qquad (6.16)$$

$r = |\vec{x}| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$.
Интуитивно това е сигнал излъчен от точка $\vec{0}$ в момент $\theta=0$ който се разпространява със скорост c и силата му намалява като $\frac{1}{r}$
В точка $(\vec{x},t)$ той се приема само за един миг. в момента $t=\frac{r}{c}$, с интензивност $\frac{1}{4\pi r}$.

В общия случай

$$G(\vec{x}, t, \vec{\xi}, \theta) = \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{\xi}|}\,\delta\left(t-\theta-\frac{|\vec{x}-\vec{\xi}|}{c}\right). \qquad (6.17)$$

Това е функцията на Грийн за трите вида гранични задачи при $V = \mathbb{R}^3$.
Вместо да проверим (6.7) ще изчислим директно $G(\vec{x}, t, \vec{0}, 0)$ и тя ще съвпадне с (6.16).

<u>Намиране на функцията на Грийн на вълновото уравнение посредством преобразувание на Фурие</u>

Функциите на Грийн на изучаваните уравнения, за произволна размерност на пространството $\mathbb{R}^n$ могат да се намерят посредством преобразувание на Фурие. Демонстрираме този метод в случая на вълновото уравнение, когато той, в некакъв смисъл е най-труден.

Избираме следните конвенции за знаците (най-често срещаните във физическата литература).

$$u(\vec{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^4} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{x})}\,\tilde{u}(\vec{k}, \omega)\, d^3k\, d\omega \qquad (6.18)$$

Тогава

$$G(\vec{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^4} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{x})}\,\tilde{G}(\vec{k}, \omega)\, d^3k\, d\omega \qquad (6.19)$$

и

$$\delta(\vec{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^4} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{x})}\,\frac{1}{(2\pi)^4}\, d^3k\, d\omega$$

Заместваме тези изрази във вълновото уравнение

$$\Delta G - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -\delta(x, t)$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^4} e^{i(\omega t-\vec{k}\vec{x})}\left(-k^2+\frac{\omega^2}{c^2}\right)\tilde{G}(\vec{k},\omega)\,d^3k\,d\omega = -\int_{\mathbb{R}^4} e^{i(\omega t-\vec{k}\vec{x})}\frac{1}{(2\pi)^4}\,d^3k\,d\omega$$

Преобразуването на Фурие е взаимно-еднозначно

$$\left(-k^2+\frac{1}{c^2}\omega^2\right)\tilde{G}(\vec{k},\omega) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \qquad (6.20)$$

Това е фурие образът на уравнението (6.19).

$$\tilde{G}(\vec{k},\omega) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{\frac{\omega^2}{c^2}-\vec{k}^2} = \frac{-c^2}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{\omega^2-\vec{k}^2c^2}$$

означаваме $|\vec{k}| = k$

$$\tilde{G}(\vec{k},\omega) = -\frac{c^2}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{(\omega-kc)(\omega+kc)} =$$

$$= -\frac{c^2}{(2\pi)^4}\left(\frac{1}{\omega-kc}-\frac{1}{\omega+kc}\right)\frac{1}{2kc} \qquad (6.21)$$

Това не е коректно определена обобщена функция защото $\frac{1}{\omega \mp kc}$ не е локално интегруема (при $\omega = \mp kc$). Ще покажем, че коректно определена обобщена функция, която да е решение на алгебричното уравнение (6.20) е

$$\tilde{G}(\vec{k},\omega) = -\frac{c^2}{(2\pi)^4}\left(\frac{1}{\omega-kc-i0}-\frac{1}{\omega+kc-i0}\right)\frac{1}{2kc}. \qquad (6.22)$$

Проверяваме дали (6.22) удовлетворява (6.20).

$$\frac{1}{c^2}(\omega-kc)(\omega+kc)\,\frac{-c^2}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{2kc}\left(\frac{1}{\omega-kc-i0}-\frac{1}{\omega+kc-i0}\right) =$$

$$= \frac{-1}{2kc(2\pi)^4}(\omega-kc)(\omega+kc)\Big(P\left(\frac{1}{\omega-kc}\right)+i\pi\delta(\omega-kc) -$$

$$- P\left(\frac{1}{\omega+kc}\right) - i\pi\delta(\omega+kc)\Big). \quad =$$

$$= \frac{-1}{2kc(2\pi)^4}\Big[(\omega+kc)\underbrace{(\omega-kc)P\left(\frac{1}{\omega-kc}\right)}_{1} + (\omega+kc)\, i\pi \underbrace{(\omega-kc)\delta(\omega-kc)}_{0} -$$

$$- (\omega-kc)\underbrace{(\omega+kc)P\left(\frac{1}{\omega+kc}\right)}_{1} + (\omega-kc)\, i\pi\underbrace{(\omega+kc)\delta(\omega+kc)}_{0}\Big]$$

$$= \frac{-1}{2kc(2\pi)^4}(\omega+kc-\omega+kc) = \frac{-1 .\, 2kc}{\cancel{2kc}\,(2\pi)^4} = -\frac{1}{(2\pi)^4}.$$

След като е намерен фурие-образът $\tilde{G}(\vec{k},\omega)$, пресмятаме

$$G(\vec{x},t)=\int e^{i(\omega t-\vec{k}\vec{x})}\frac{-c}{2k(2\pi)^4}\left(\frac{1}{\omega-kc-i0}-\frac{1}{\omega+kc-i0}\right)d^3k\,d\omega =$$

$(\vec{x}, t)$ са фиксирани при интегрирането по $(\vec{k},\omega)$. Въвеждаме сферични координати за променливите $\vec{k}=(k_1,k_2,k_3)\to(k,\theta,\varphi)$. Избираме оста k_3 да е по направление на вектора $\vec{x}$. Означаваме $|\vec{x}|=r$ и тогава $\vec{x}.\vec{k}= r.k.\cos\theta$

$$=\frac{-c}{2.(2\pi)^4}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}. e^{-ikr\cos\theta}.\left(\frac{1}{\omega-kc-i0}-\frac{1}{\omega+kc-i0}\right).\frac{1}{\cancel{k}}.$$

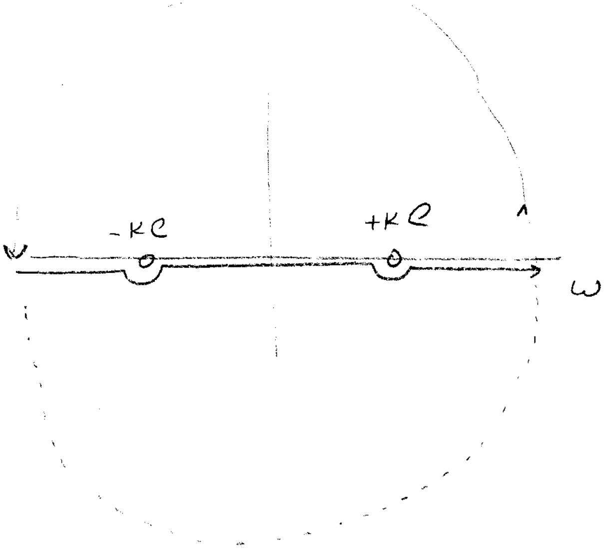
$$. k^{\cancel{2}\,1}\sin\theta\,dk\,d\theta\,d\varphi\,d\omega =$$

интегрирането по φ се извършва веднага

$$=\frac{-c.\cancel{2\pi}}{2(2\pi)^{\cancel{4}3}}\int_0^\infty dk.\int_0^\pi d\theta\,.\,e^{-ikr\cos\theta}.\,k\sin\theta\,.$$

$$.\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega t}\left(\frac{1}{\omega-kc-i0}-\frac{1}{\omega+kc-i0}\right)d\omega =$$

Съгласно дефиницията на $\frac{1}{x\pm i0}$ изчисляваме интеграла по ω като интегрираме по затворен контур в $\mathbb{C}$ както е показано на чертежа



При $t>0$ затваряме отгоре. Както е известно, в границата, интегралът по полуокръжността е нула и по теоремата на резидуумите получаваме

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\left(\frac{1}{\omega-kc-i0}-\frac{1}{\omega+kc-i0}\right)d\omega = 2\pi i\left(e^{ikct}-e^{-ikct}\right).$$

При $t<0$ затваряме отдолу. Отново интегралът по полуокръжността, в границата, е нула и по теоремата за резидуумите интегралът е 0.
Т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\left(\frac{1}{\omega-kc-i0}-\frac{1}{\omega+kc-i0}\right)d\omega = \theta(t)2\pi i\left(e^{ikct}-e^{-ikct}\right).$$

Продължаваме пресмятането

$$= \frac{-c.2\pi.\theta(t)}{2.(2\pi)^{3\,2}} \int_0^\infty\int_0^\pi e^{-ikr\cos\theta}\, ik\sin\theta\, .\left(e^{ikct}-e^{-ikct}\right)dk\,d\theta$$

$$= \frac{-c.\theta(t)}{2.(2\pi)^2.r}\int_0^\infty\left(e^{ikct}-e^{-ikct}\right).\int_0^\pi e^{-ikr\cos\theta}\,d(-ikr\cos\theta).\,dk =$$

$$= \frac{-c.\theta(t)}{2.(2\pi)^2.r}\int_0^\infty\left(e^{ikct}-e^{-ikct}\right)e^{-ikr\cos\theta}\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi}dk =$$

$$= \frac{-c\,\theta(t)}{2(2\pi)^2 r}\int_0^\infty\left(e^{ikct}-e^{-ikct}\right)\left(e^{ikr}-e^{-ikr}\right)dk =$$

$$= \frac{-c\cdot\theta(t)}{2(2\pi)^2 r}\int_0^{\infty}\left(e^{ik(ct+r)} - e^{ik(ct-r)} - e^{-ik(ct-r)} + e^{-ik(ct+r)}\right)dk =$$

$$= \frac{-c\cdot\theta(t)}{2(2\pi)^2\cdot r}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{ik(ct+r)} - e^{ik(ct-r)}\right)dk =$$

но $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx}\,dp = 2\pi\delta(x)$

$$= \frac{-c\cdot\theta(t)\,\cancel{2\pi}}{2\cdot(2\pi)^{\cancel{2}}\cdot r}\left(\delta(ct+r) - \delta(ct-r)\right) =$$

$$= \frac{c}{4\pi r}\,\delta(ct-r) = \frac{1}{4\pi r}\,\delta\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

Коментар. Може да се провери, че уравнението (6.20) има и други решения, например $c+i0$. Тогава (6.19) ще даде фундаментално решение, което няма да удовлетворява нулевите начални и гранични условия.

Ако разгледаме вълновото уравнение в цялото пространство $\mathbb{R}^3\times[-\infty,+\infty)$ с нулеви начални и гранични условия решението е

$$u(\vec{x},t) = \int_{\mathbb{R}^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{\xi}|}\,\delta\left(t-\theta-\frac{|\vec{x}-\vec{\xi}|}{c}\right)d(\vec{\xi},\theta)\,d^3\xi\,d\theta.$$

Благодарение на δ-функцията интегрирането по θ може да се извърши веднага

$$u(\vec{x},t) = \int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{\xi}|}\,d\left(\vec{\xi},\,t-\frac{|\vec{x}-\vec{\xi}|}{c}\right)d^3\xi$$

Коментар Решението в точка $\vec{x}$ и момент t

се определя от източниците. Влиянието на източник с плътност $d(\vec{\xi}, 0)$ в точката $\vec{\xi}$ е равно на $\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{\xi}|} \cdot d(\vec{\xi}, t - \frac{|\vec{x}-\vec{\xi}|}{c})\, d^3\xi$.

Това е сигнал пропорционален на елементарния товар и обратно пропорционален на разстоянието. Но плътността в точката $\vec{\xi}$ е взета не в същия момент, а в един предишен момент: $t - \frac{|\vec{x}-\vec{\xi}|}{c}$. Отместването е равно на времето за което сигнал със скорост c изминава разстоянието между $\vec{x}$ и $\vec{\xi}$.

Справка

Посредством фурие преобразувания могат да се намерят функциите на Грийн на разгледаните уравнения при произволна размерност. Примери:

за $\Delta G = -\delta(\vec{x})$ в $\mathbb{R}^n$

$$G(\vec{x}) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln|x| & n = 2 \\ \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \frac{1}{|x|^{n-2}} & n = 3, 4, \ldots \end{cases}$$

Където σ_n е обемът на $n-1$-мерната единична сфера в $\mathbb{R}^n$

Изчисляване на σ_n:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)} d^n x = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_1^2} dx_1 \right)^n = (\sqrt{\pi})^n$$

От друга страна, при преминаване към сферични координати $(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$
Оценяваме интеграла

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\vec{x}^2} d^n x = \int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1} dr \cdot \int_{S^{n-1}} |d\vec{s}| =$$

$$= \sigma_n \cdot \int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1} dr =$$

смяна $r^2 = u$, $r = \sqrt{u}$, $dr = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{u}} du$

$$= \sigma_n \cdot \int_0^\infty e^{-u} u^{\frac{n-1}{2}} \cdot u^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} du = \frac{1}{2}\sigma_n \int_0^\infty e^{-u} \cdot u^{\frac{n}{2}-1} du =$$

$$= \frac{1}{2}\sigma_n \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Rightarrow \sigma_n = 2\pi^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

пренесено на стр 6.22

Гринова функция на вълновото уравнение в $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1$

Метод на спускането

Идея: Вълновото уравнение в $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1$ е всъщност вълново уравнение в $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^1 \ni (x, y, z, t)$ в което нищо не зависи от z

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} G + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} G + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_3^2} G}_{0} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} G = -\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(t)$$

$$G(x_1, x_2, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^1} G(x_1, x_2, 0, t, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \theta) \delta(\xi_1)\delta(\xi_2)\delta(\theta) d^3\xi \, d\theta$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} G(x_1, x_2, 0, t; 0, 0, \xi_3, 0) \, d\xi_3 =$$

формула на Адамар-Кирхов за решението на вълновото уравнение.

Нека $V = \mathbb{R}^3$, $t \in (0, \infty)$. Търсим решение с начални условия:

$$\begin{cases} u(\vec{x}, 0) = u_0(\vec{x}) \\ \partial_t u(\vec{x}, 0) = v_0(\vec{x}) \end{cases}$$

и нулеви гранични условия

Тогава, съгласно общата формула за решението

$$u(\vec{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^\infty G(\vec{x}, t, \vec{\xi}, \theta)\, d(\vec{\xi}, \theta)\, d^3\xi\, d\theta \; +$$

$$+ \frac{1}{c^2} \int_{\mathbb{R}^3} G(\vec{x}, t, \vec{\xi}, 0) V_0(\vec{\xi})\, d^3\xi - \frac{1}{c^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial\theta} G(\vec{x}, t, \vec{\xi}, 0) u_0(\vec{\xi})\, d^3\xi$$

$$G(\vec{x}, t, \vec{\xi}, \theta) = \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{\xi}|} \delta\left(t - \theta - \frac{|\vec{x} - \vec{\xi}|}{c}\right)$$

като $\theta > 0$ (точковият източник трябва да е в областта на решимост).

Пресмятаме последователно интегралите

1. $$\int_{\mathbb{R}^3} \int_0^\infty G(\vec{x}, t, \vec{\xi}, \theta)\, d(\vec{\xi}, \theta)\, d^3\xi\, d\theta = \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^\infty \frac{\delta\left(t - \theta - \frac{|\vec{x} - \vec{\xi}|}{c}\right)}{4\pi|\vec{x} - \vec{\xi}|} d(\vec{\xi}, \theta)\, d^3\xi\, d\theta =$$

Първо интегрираме по θ. $t - \theta - \frac{|\vec{x} - \vec{\xi}|}{c} = 0$

$$\Rightarrow t - \frac{|\vec{x} - \vec{\xi}|}{c} = \theta > 0 \Rightarrow t.c > |\vec{x} - \vec{\xi}|$$

t и $\vec{x}$ са параметри при интегрирането по $\vec{\xi}$

$\Rightarrow |\vec{\xi} - \vec{x}| < ct$ (При $|\vec{\xi} - \vec{x}| > ct \rightarrow \delta\left(t - \theta - \frac{|\vec{x} - \vec{\xi}|}{c}\right) = 0$ защото интегралът по θ е в интервала $(0, \infty)$).

$$= \int_{|\vec{\xi} - \vec{x}| < ct} \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{\xi}|} d\left(\vec{\xi}, t - \frac{|\vec{x} - \vec{\xi}|}{c}\right) d^3\xi$$

<u>Интерпретация</u>

Този интеграл дава приноса на източниците.

Тази част от решението е "сума" (интеграл) от приносите на източниците в различни точки "ξ".
За стойността на решението в точка $\vec{x}$ и момент t, приносът на точка $\vec{\xi}$ зависи от интензитета на източника в точката ξ, но не в момента t а в един забавен момент $t - \frac{|\vec{x}-\vec{\xi}|}{c}$. Забавянето е точно времето необходимо за сигнал със скорост c да измине разстоянието от $\vec{\xi}$ до $\vec{x}$. Силата на сигнала е обратно пропорционална на разстоянието $|\vec{x}-\vec{\xi}|$. Като че ли всяка точка $\vec{\xi}$ излъчва сигнали във всички посоки разпространяващи се със скорост c и намаляващи по сила съгласно закона $\frac{d(\vec{\xi},0)\cdot d^3\xi}{4\pi|\vec{x}-\vec{\xi}|}$
Стойността на решението $u(\vec{x},t)$ в точка $(\vec{x},t)$ е "сума" (интеграл) от всички сигнали, излъчени от всички точки $\vec{\xi}$ които пристигат в $\vec{x}$ точно в момента t. За да пристигне в точка $\vec{x}$ в момент t сигналът от точка $\vec{\xi}$ трябва да е излъчен в момент $t - \frac{|\vec{x}-\vec{\xi}|}{c}$ и неговата "сила" се определя от интензитета в $\vec{\xi}$ в този забавен момент, т.е. $d\left(\vec{\xi}, t - \frac{|\vec{x}-\vec{\xi}|}{c}\right)$.
Ограничението $|\vec{\xi}-\vec{x}| < ct$ идва от това, че в тази област на решението еволюцията е започнала в момента $t=0$. Сигналите излъчени от точки $\vec{\xi}$ за които $|\vec{\xi}-\vec{x}| > c\cdot t$ още не са пристигнали.

2. $$\frac{1}{c^2}\int_{\mathbb{R}^3} G(\vec{x},t,\vec{\xi},0)\,V_0(\vec{\xi})\,d^3\xi = \frac{1}{c^2}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{\xi}|}\,\delta\left(t-\frac{|\vec{x}-\vec{\xi}|}{c}\right)V_0(\vec{\xi})\,d^3\xi =$$

смяна на променливите: $\vec{\xi} = \vec{x}+\vec{x}'$, $d^3\xi = d^3x'$

$$= \frac{1}{c^2}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|\vec{x}'|}\,\delta\left(t-\frac{|\vec{x}'|}{c}\right)V_0(\vec{x}+\vec{x}')\,d^3x' =$$

смяна на променливите: сферични координати за $\vec{x}'$:
$\vec{x}' \to (r',\theta',\varphi') \to d^3x' = r'^2\sin\theta'\cdot dr'\,d\theta'\,d\varphi'$

$$= \frac{1}{c^2}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi r'}\,\delta\!\left(t-\frac{r'}{c}\right) V_0(\vec{x}+\vec{x}'(r',\theta',\varphi'))\, r'^2 \sin\theta'\, dr'\, d\theta'\, d\varphi' =$$

Благодарение на δ-функцията, извършваме интегрирането по r'

$$r' = ct \qquad , \left|\frac{d}{dr'}\left(t-\frac{r'}{c}\right)\right| = \frac{1}{c}$$

$$= \frac{1}{c^2 \cdot 4\pi}\cdot c \cdot \int_0^\pi\int_0^{2\pi} V_0(\vec{x}+\vec{x}'(ct,\theta',\varphi'))\cdot\frac{1}{ct}\cdot \underbrace{(ct)^2 \sin\theta'\, d\theta'\, d\varphi'}_{|d\vec{\sigma}|} =$$

$$= \frac{1}{4\pi c}\cdot\frac{1}{ct}\oiint_{|\vec{\xi}-\vec{x}|=ct} V_0(\vec{\xi})\,|d\vec{\sigma}|$$

Това е интеграл по сфера с център $\vec{x}$ и радиус $c.t$

Интерпретацията е същата. Еволюцията е започнала при $t=0$. В точка $\vec{x}$, в момент $t>0$ стойността на решението се определя от тези начални данни в момента 0, които са на разстояние $c.t$ от точката $\vec{x}$.

3. $$-\frac{1}{c^2}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial\theta} G(\vec{x},t,\vec{\xi},0)\, U_0(\vec{\xi})\, d^3\xi =$$

$$\overset{!}{=} +\frac{1}{c^2}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{\xi}|}\,\delta'\!\left(t-\frac{|\vec{x}-\vec{\xi}|}{c}\right) U_0(\vec{\xi})\, d^3\xi =$$

смяна на променливите: $\vec{\xi} = \vec{x}+\vec{x}' \to d^3\xi = d^3x'$

$$= \frac{1}{c^2}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|\vec{x}'|}\,\delta'\!\left(t-\frac{|\vec{x}'|}{c}\right) U_0(\vec{x}+\vec{x}')\, d^3x' =$$

смяна на променливите: сферични координати за $\vec{x}'$.

$\vec{x}' \to (r',\theta',\varphi')$, $d^3x' = r'^2 \sin\theta'\, dr'\, d\theta'\, d\varphi'$

$$= \frac{1}{c^2}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi \cancel{r'}}\,\delta'\!\left(t-\frac{r'}{c}\right) U_0(\vec{x}+\vec{x}'(r',\theta',\varphi'))\, r'^{\cancel{2}} \sin\theta'\, dr'\, d\theta'\, d\varphi' =$$

Първо интегрираме по r'

$$= \frac{-c}{4\pi c^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\underbrace{\left[\int_0^{\infty}u_0(\vec{x}+\vec{x}'(r',\theta',\varphi'))\cdot r'\cdot d\left(\delta\left(t-\frac{r'}{c}\right)\right)\right]}_{\text{интегрираме по части}}\sin\theta' d\theta' d\varphi' =$$

$$= +\frac{1}{4\pi c}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\infty}\delta\left(t-\frac{r'}{c}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial r'}\left(u(\vec{x}+\vec{x}'(r',\theta',\varphi'))\cdot r'\right)dr'\right]\sin\theta' d\theta' d\varphi' =$$

$$= \frac{1}{4\pi c}\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\delta\left(t-\frac{r'}{c}\right)\left[u_0(\vec{x}+\vec{x}'(r',\theta',\varphi'))+\frac{\partial}{\partial\vec{\nu}}u_0(\vec{x}+\vec{x}'(r',\theta',\varphi'))\cdot r'\right]\sin\theta' dr' d\theta' d\varphi' =$$

$$= \frac{c}{4\pi c}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left[u_0(\vec{x}+\vec{x}'(ct,\theta',\varphi'))+\frac{\partial}{\partial\vec{\nu}}u_0(\vec{x}+\vec{x}'(ct,\theta',\varphi'))\cdot ct\right]\frac{1}{(ct)^2}\underbrace{(ct)^2\sin\theta' d\theta' d\varphi'}_{|d\vec{\sigma}|} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\oint\!\!\!\oint_{|\vec{\xi}-\vec{x}|=ct}\left[u_0(\vec{\xi})\frac{1}{(ct)^2}+\frac{\partial}{\partial\vec{\nu}}u_0(\vec{\xi})\frac{1}{ct}\right]|d\vec{\sigma}|$$

Имаме същата интерпретация. Особеност: Влиянието на началното положение $u_0(x)$ е чрез $u_0(\vec{\xi})$ и $\frac{\partial}{\partial\nu}u_0(\vec{\xi})$ като влиянието на $u_0(\vec{\xi})$ намалява като $\frac{1}{(ct)^2}$, а влиянието на $\frac{\partial}{\partial\vec{\nu}}u_0(\vec{\xi})$ като $\frac{1}{ct}$

<u>Окончателно</u>

$$u(\vec{x},t) = \int_{|\vec{\xi}-\vec{x}|<ct}\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{\xi}|}d\left(\vec{\xi},t-\frac{|\vec{x}-\vec{\xi}|}{c}\right)\cdot d^3\xi \; +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\oint\!\!\!\oint_{|\vec{\xi}-\vec{x}|=ct}\left[\frac{1}{ct}V_0(\vec{\xi})+\frac{1}{(ct)^2}u_0(\vec{\xi})+\frac{1}{ct}\frac{\partial}{\partial\vec{\nu}}u_0(\vec{\xi})\right]|d\vec{\sigma}|$$

Това са формулите на Адамар - Кирхов за решението. Ако областта на решимост е $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$ $(t\in(-\infty,+\infty))$ и началните условия при $t\to-\infty$ са нулеви остава само

$$u(\vec{x},t) = \int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{\xi}|}d\left(\vec{\xi},t-\frac{|\vec{x}-\vec{\xi}|}{c}\right)d^3\xi$$

Това се интерпретира като "собствено поле на източниците за цялото време на съществуването им"

Получаване функцията на Грийн за $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}$ посредством метода на спускането.

Идея

Вълновото уравнение в $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}$ може да се разглежда като вълново уравнение в $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$ в което източниците и търсените решения не зависят от третата координата x_3

Търсим решение на

$$\partial^2_{x_1}G+\partial^2_{x_2}G-\frac{1}{c^2}\partial^2_t G=-\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(t)$$

$(G(x_1,x_2,t)$ - гринова функция с полюс в $(\vec{0},0))$

Това решение може да се търси като решение на

$$\partial^2_{x_1}u+\partial^2_{x_2}u+\partial^2_{x_3}u-\frac{1}{c^2}\partial^2_t u=-\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(t)$$

което не зависи от x_3

Интегралът за собственото поле на източниците дава

$$u(x_1,x_2,x_3,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^3}\int\limits_{\mathbb{R}}G(x_1,x_2,x_3,t,\xi_1,\xi_2,\xi_3,\theta)\delta(\xi_1)\delta(\xi_2)\delta(\theta)\,d^3\xi\,d\theta=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}G(x_1,x_2,x_3,t,0,0,\xi_3,0)\,d\xi_3=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\delta\left(t-\frac{1}{c}\sqrt{x_1^2+x_2^2+(x_3-\xi_3)^2}\right)}{4\pi\sqrt{x_1^2+x_2^2+(x_3-\xi_3)^2}}\,d\xi_3=$$

Това решение не зависи от x_3 $\to$ сменяме $\xi_3\to\xi_3+x_3$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{c\,\delta\left(ct-\sqrt{x_1^2+x_2^2+\xi_3^2}\right)}{4\pi\sqrt{x_1^2+x_2^2+\xi_3^2}}\,d\xi_3=2\int_{0}^{\infty}\frac{c\,.\,\delta\left(ct-\sqrt{\rho^2+\xi_3^2}\right)}{4\pi\sqrt{\rho^2+\xi_3^2}}\,d\xi_3=$$

$(\rho^2=x_1^2+x_2^2)$. Корен: $c^2t^2=\rho^2+\xi_3^2$ & $\xi_3>0$ $\Rightarrow$ $\xi_3=\sqrt{c^2t^2-\rho^2}$

при $ct-\rho<0$ няма корен и интегралът е 0

$$=\frac{c}{2\pi}\,\frac{1}{\sqrt{\rho^2+\xi_3^2}}\cdot\frac{1}{\frac{\xi_3}{\sqrt{\rho^2+\xi_3^2}}}\Bigg|_{\xi_3=\sqrt{c^2t^2-\rho^2}}\cdot\theta(ct-\rho)=\frac{c}{2\pi}\,\frac{1}{\sqrt{c^2t^2-\rho^2}}\,\theta(ct-\rho)$$

$$\Rightarrow \quad G(\vec{x},t,\vec{\xi},\theta) = \frac{c}{2\pi}\,\frac{\Theta\big(c(t-\theta)-|\vec{x}-\vec{\xi}|\big)}{\sqrt{c^2(t-\theta)^2-(\vec{x}-\vec{\xi})^2}}, \quad \vec{x}\in\mathbb{R}^2$$

Коментар

В двумерното пространство точков източник в $(\vec{0},0)$ се възприема в точка $(\vec{x},t)$, $t>0$ така: До момента $t=\frac{\rho}{c}$ няма сигнал. В момента $t=\frac{1}{c}\rho$ пристига фронтът на сигнала който след това непрекъснато намалява и клони към нула когато $t\to+\infty$ но винаги е отличен от 0! Двумерните светлини изгряват в един миг но светят вечно за наблюдателя! Методът на спускането дава физическо обяснение за това. Представянето на $\mathbb{R}^2$ като $\mathbb{R}^3$ в което нищо не зависи от x_3 дава следната интерпретация: точков източник в $\vec{0}\in\mathbb{R}^2$ означава източник с носител правата $(0,0,x_3)$, $x_3\in\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^3$. В един миг оста "x" светва и угасва. В точка $(x_1,x_2,0)$ първо пристига сигналът от най-близката точка от правата (от $(0,0,0)$), след това от по-далечните точки. Това е общ резултат. В $\mathbb{R}^{2n+1}\times\mathbb{R}$, $n=1,2,..$ функцията на Грийн има носител по повърхността на светлинния конус. В $\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}$, $n=1,2,..$ носителят на функцията на Грийн е във вътрешността (заедно с повърхността) на светлинния конус на бъдещето.